small-world ネットワークにおける協調性の創発

今　枝　辰　博

キーワード

spatial evolutionary game	空間的進化ゲーム
emergence	創発
small-world network	small-world ネットワーク

1. はじめに

プレーヤーが，“協調（cooperation）”と“裏切り（defection）”の２つの戦略をもつ，囚人のジレンマゲームにおいては，相手の戦略にかかわらず“裏切り”を選ぶのが最善である。ところが，このゲームを集団で繰り返しておこない，その総得点を競う「繰り返し囚人のジレンマゲーム」では，裏切り続けるプレーヤーよりも，“おうむ返し（Tit for Tat）”のような，協調性の高い戦略の方が高得点を得ることができる[(1)]。Axelrod によるこの発見以来，このような繰り返しゲームは，協調性の創発のモデルとして多くの研究がなされてきた[(2)，(3)，(4)，(5)，(6)]。

Nowak と May は，これらのプレーヤーを空間内で定義された格子点上に配置して，その隣接した格子点上のプレーヤーとゲームを行わせるモデルを考えた[(7)]。この空間的進化ゲームにおいては，空間的自由度が協調性の創発を

うながし，協調戦略をとるプレーヤーと裏切り戦略を取るプレーヤーとが空間内で共存することができる。また，このモデルが時間空間的にきわめて豊かなダイナミクスを示すことから，その後いくつかの空間的進化ゲームが提案され，空間の次元や格子の形とそのダイナミクスのかかわりなどが研究されている[(8)〜(18)]。

本論文では，このような空間的進化ゲームにおける協調性の創発に対するsmall-world 効果を考える。

空間的に規則正しく並んだ規則格子（regular lattice）において，ランダムに選んだ格子点の対を結んだ，少数のショートカットを加える。するとバーテックス間の平均最短距離などのネットワークを特徴づける量が劇的に変化することが Watts と Strogatz によって見出された[(19)]。このようなネットワークを small-world ネットワークとよび，ネットワークの静的・動的性質へのショートカットの効果を small-world 効果という[(20)]。その後の多くの研究によって，多くの社会的，自然的，人工的ネットワークが small-world ネットワークとしての性質を持つことが知られている。

Watts は，この small-world ネットワーク上で，Generalized Tit-for-Tat 戦略と Win-Stay，Lose-Shift 戦略の場合についてシミュレーションをおこない，協調戦略をもったプレーヤーの数の時間変化について議論している。その結果は，small-world 効果が協調性をうながしているようにみえるが，明確な結論は得られていない。

本論文では，Chiappin と Oliveira[(17)] が規則格子上でその性質を調べた空間ゲームを small-world ネットワーク上でシミュレートする。そして，small-world 効果として，異なる戦略をもったプレーヤーの共存が起こることを見出す。また，この共存状態と 1 つの戦略をもったプレーヤーのみからなる状態との転移が連続転移であることを述べ，その属する普遍クラス（universality class）について議論する。

2. モデル

最初に，Chiappin と Oliveira のモデルについて述べる。N 個の格子からなる 1 次元規則格子を考える。各格子点上にプレーヤーをおき，それぞれのプレーヤーは，協調戦略（C）または，裏切り戦略（D）をとる。プレーヤーは，格子上で自分と隣あうプレーヤーが 1 ラウンド前にとった戦略をもとにした，以下のルールにしたがって，その戦略を更新して，繰り返しゲームをおこなう。
まず，プレーヤー i を，N 人の中からランダムに選ぶ。つぎに，プレーヤー i と隣り合ったプレーヤー（1 次元規則格子では，2 人）のなかから，プレーヤー j をランダムに選ぶ。

(a) プレーヤー i と j が前回のラウンドで同じ戦略をとっていた場合，プレーヤー i は前回の戦略を変更しない。

(b) 前回のラウンドで，プレーヤー i が協調戦略をとり，プレーヤー j が裏切り戦略をとった場合，プレーヤー i は確率 a で裏切り戦略に変更する

(c) 前回のラウンドで，プレーヤー i が裏切り戦略をとり，プレーヤー j が協調戦略をとった場合，プレーヤー i は，その隣り合うプレーヤーのうちで，j とは異なるプレーヤー k をランダムに選ぶ（1 次元規則格子では，一意的に決まる）。そして，プレーヤー k が前回のラウンドで C 戦略をとった場合には，プレーヤー i は確率 b_1 で協調戦略に変更する。一方，プレーヤー k が前回のラウンドで裏切り戦略をとっていた場合には，プレーヤー i は，確率 b_2 で協調戦略に変更する。

このような対戦を N 回行ったのち，時間 t を 1 進める。すなわち，時間の単位を MCS（Monte Carlo Step）ではかる。この戦略の更新法は，囚人のジレンマゲームにおける，協調―協調，裏切り―裏切り，協調―裏切り，裏切り―協調に対応している。また，時間スケールを適当にとれば，系を特徴づ

ける独立なパラメータは $r = a / b_2$ と $c = b_1 / b_2$ の2つとすることができる。rは“報復”の度合いを表すパラメータ，cは“協調”の度合いを表すパラメータである。

Chiappin と Oliveira は，このモデルの性質を1次元と2次元のコンピュータ・シミュレーションによって調べ，その定常状態について，以下の結論を導いた。

(1) 1次元規則格子では，$r > 1$ で，全プレーヤーが裏切り戦略をとるD相，$r < 1$ では，全プレーヤーが協調戦略を取るC相の2相のみが存在し，D相とC相の間の転移は不連続である。また，その性質はcの値によらない。

(2) 2次元規則格子では，C相とD相以外に，協調戦略をもつプレーヤーと裏切り戦略を持つプレーヤーとが共存するA相（active phase）が存在する。そして，A相からD相への転移は連続であり，そこで起こる臨界現象は，direct percolation と同じ普遍クラスに属する。

本論文では，1次元規則格子に少数のショートカットを加えた small-world ネットワークにおいても，C相，D相以外に，A相が存在し，A相からD相への転移は連続であるが，その臨界現象の普遍性はショートカットの数というパラメータによって破れていることを述べる。

3. シミュレーション

本論文では，Newman と Watts の方法によって，small-world ネットワークを構成する[(49)]。1次元規則格子状に並んだm個の格子点を考える。周期的境界条件を課すことにする。各格子点は2個の最隣接格子点と結びついているとする。次に全格子点の中から2つの格子点をランダムに選び，その対に対してm個あたりpの確率でショートカットを加える。pの値が充分小さいときは small-world の性質を十分よくあらわしている。

シミュレーションは，すべてのプレーヤーがランダムに協調戦略か裏切り

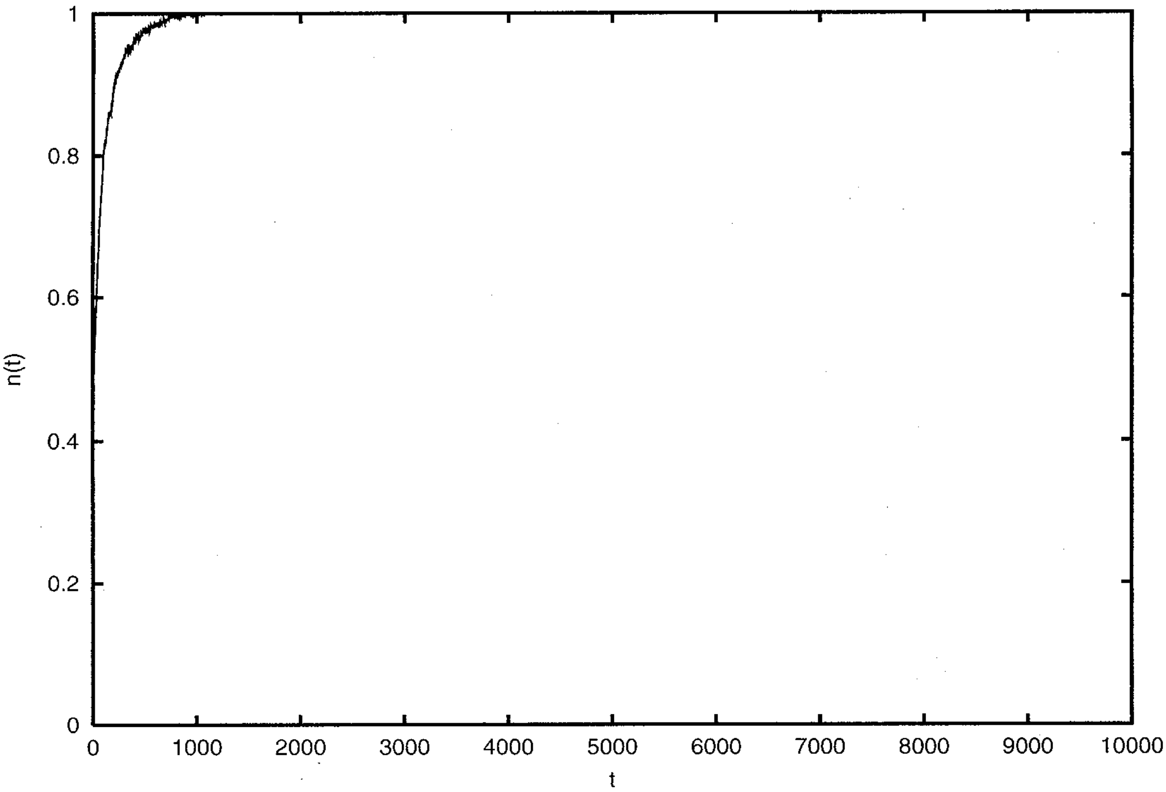


図１（a）：協調戦略をとるプレーヤーの数の割合ｎ（t）の時間変化．
ｃ＝０，ｐ＝0.1，ｒ＝0.7

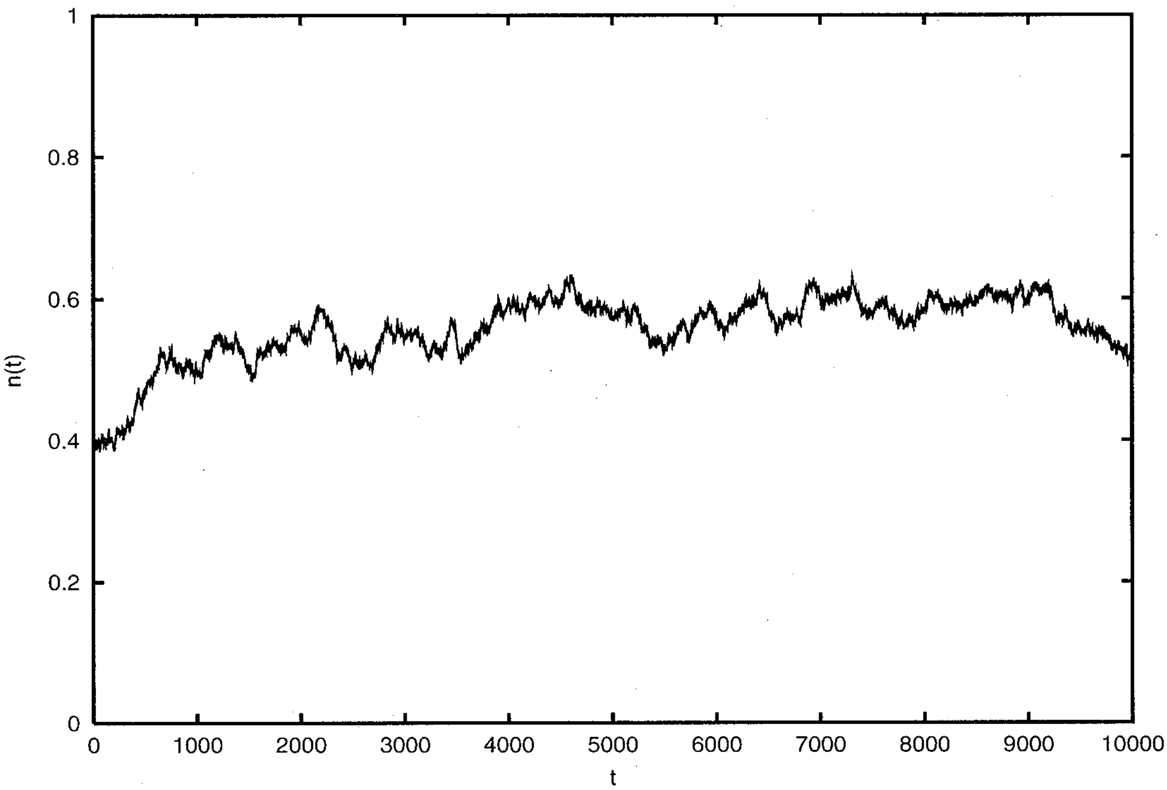


図１（b）：協調戦略をとるプレーヤーの数の割合ｎ（t）の時間変化．
ｃ＝０，ｐ＝0.1，ｒ＝0.9

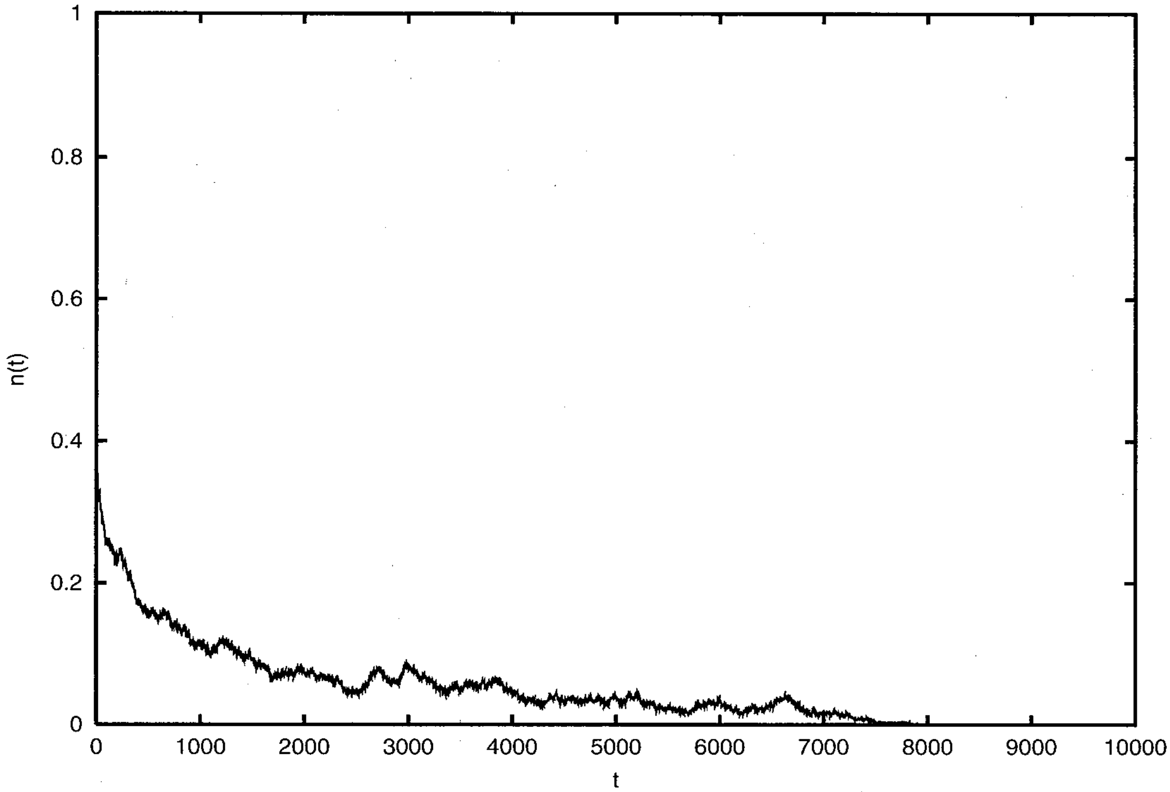


図 1（c）：協調戦略をとるプレーヤーの数の割合 n（t）の時間変化.
c = 0, p = 0.1, r = 1.1

戦略をとる状態を初期条件とした。プレーヤーの数は，10^3, $t = 10^4 \sim 10^6$MCS までの試行を行った。

協調戦略をとるプレーヤーの数の割合 n(t) の時間発展について，代表的な例を図 1 に示す。図 1（a）は，C 相を，（b）は A 相を，（c）は D 相を示している。規則格子では，図 1（b）のようなそれぞれの戦略をもつプレーヤーが共存することは起こらない。すなわち，A 相の存在は，small-world 効果によるものである。

さらに，プレーヤーについての初期条件とネットワークを変えた 10^2 回の試行をおこなった。プレーヤーの数 n(t) をそれらの試行について平均した量 <n(t)>は，時間と共に定常値に近づく。その定常値をρとかくと，ρ= 1 は C 相，ρ= 0 は D 相，0 <ρ< 1 のときは，A 相をあらわす。

c = 0 としたときの，r の値に対するρの値の変化を図 2 に示す。p = 0 の規則格子のときは，r < 1 では，ρ= 1（C 相），r > 1 ではρ= 0（D 相）であ

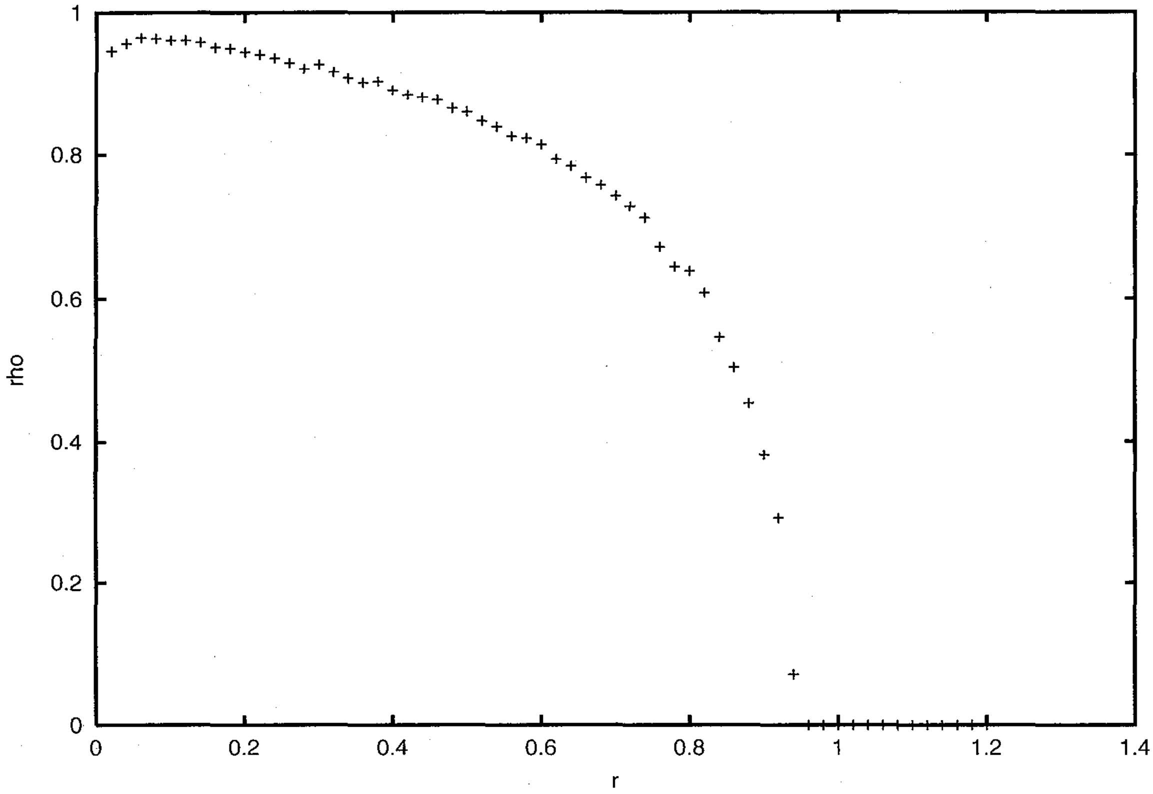


図 2（a）：定常状態におけるρの値　vs　r.
c = 0,　p = 0.1

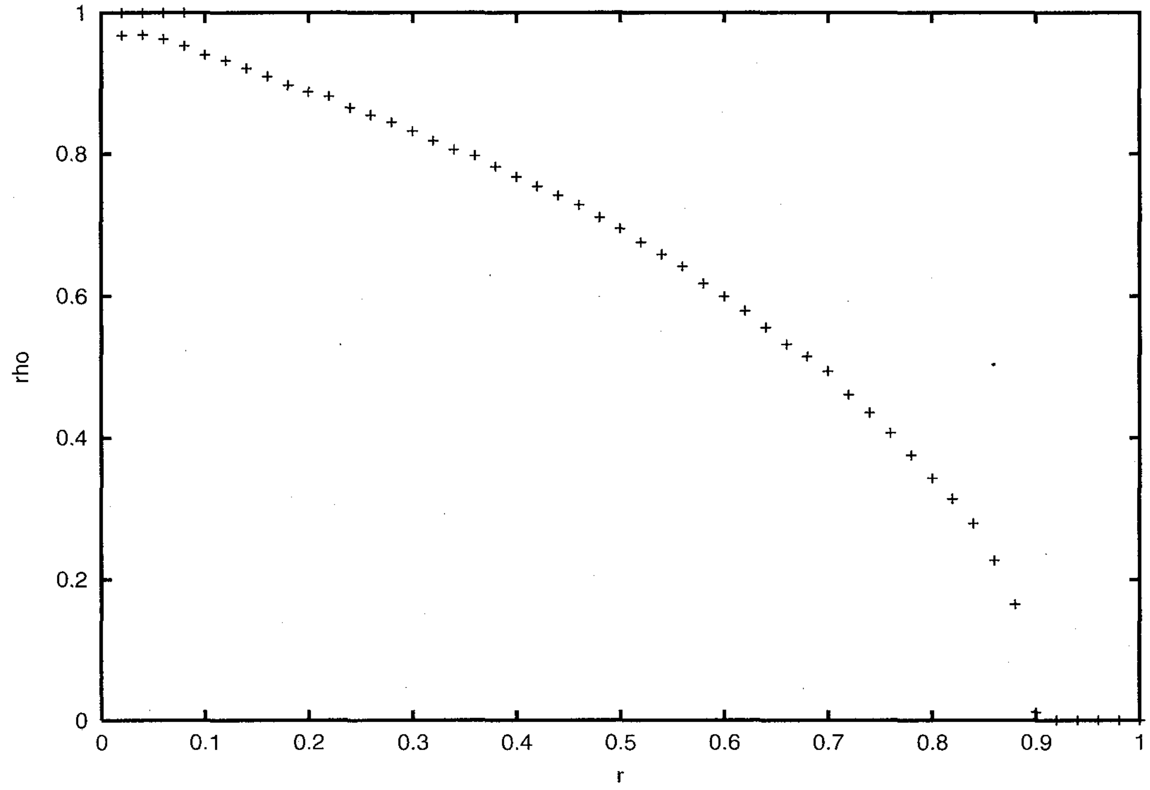


図 2（b）：定常状態におけるρの値　vs　r.
c = 0,　p = 0.5

り，$r = 1$ において不連続な，階段関数になる。一方，$p > 0$ では，small-world 効果により，転移は連続となり $0 < \rho < 1$ である A 相が存在する。

また，$c = 0.1$ としたときの，r の値に対するρの値の変化を図 3 に示す。定性的には，$c = 0$ の場合と変わらないが，A 相が存在する r の値の領域が狭くなっている。

このようにして，p の値を固定して，図 4 のような相図を描くことができる。この図では，$p = 0.1$ である。A 相が存在することにより，2 次元規則格子の相図とトポロジカルに同型になっている。p の値を増やしても，相図のトポロジカルな性質は変化しないが，A 相の領域が狭くなる。

A 相から D 相への連続転移は臨界現象の存在を示唆している [50]。実際ρの r についての依存性は，図 5 に示すように，臨界現象に特有なべき乗の関係

$$\rho \sim (r_c - r)^{\beta} \tag{1}$$

が成り立っていることが分かる。ここで，r_c は r の臨界値，βは臨界指数を表す。$c = 0$，$p = 0.1$ の時には，$r_c = 0.94 \pm 0.01$，$\beta = 0.4 \pm 0.05$ と見積もることができる。2 次元の規則格子の場合も，このような臨界現象が存在しそこでのβは，0.58 ± 0.01 と評価されている。Chiappin たちは，この値が 2 ＋ 1 次元における direct percolation [51] [52] と一致しており，2 つのモデルが同じ普遍クラスに属すると主張している。これは，一般論から十分うなずけることである [53] [54]。一方われわれの場合には，臨界指数が明らかに p の値による。たとえば，$c = 0$，$p = 0.5$ の場合は，$\beta = 0.45$ と見積もることができる。すなわち，small-world ネットワークにおいては，通常の臨界現象とは異なり，その普遍性が破れていることを示している。c の値が大きくなると，図 4 から明らかなように，C 相から D 相への転移が直接起こる。この転移は，1 次元規則格子で起こる転移と同種のもので，シミュレーションの結果は，不連続におこることを示唆している。その境界は，3 重臨界点であると思われるが，それを確かめるためには，さらに広範な研究が必要である。

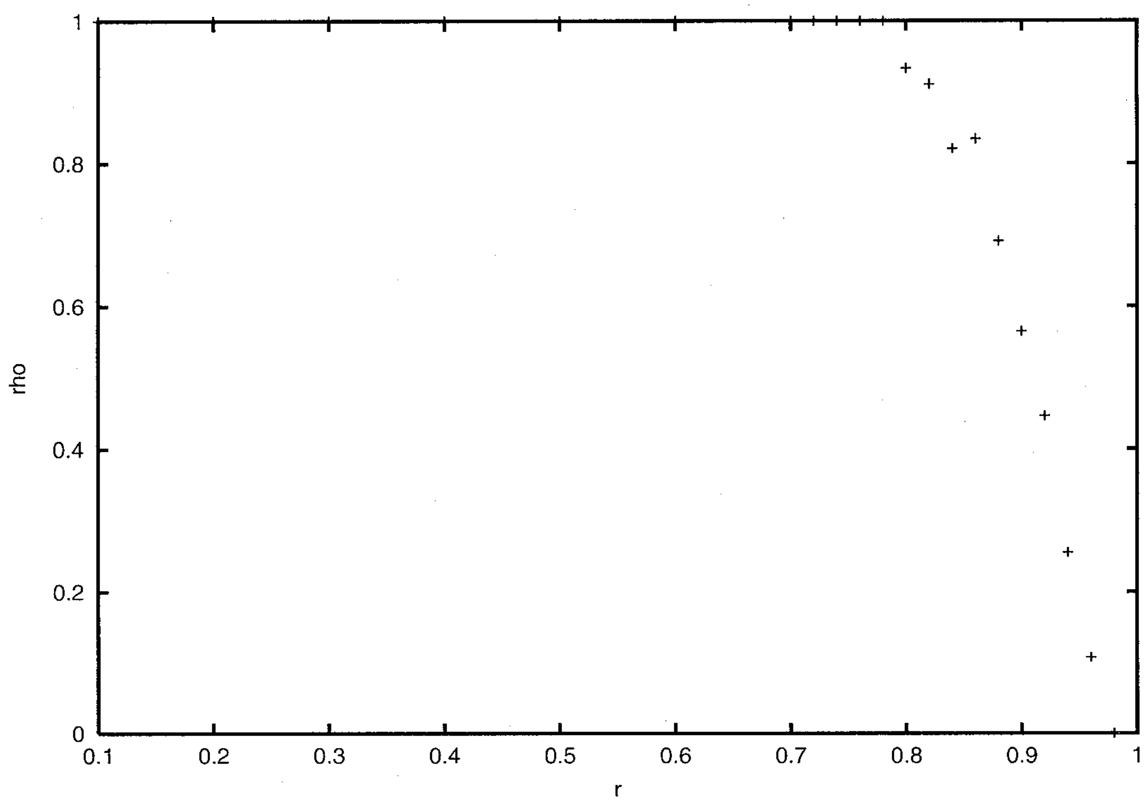


図 3（a）：定常状態におけるρの値　vs　r.
c = 0.1，p = 0.1

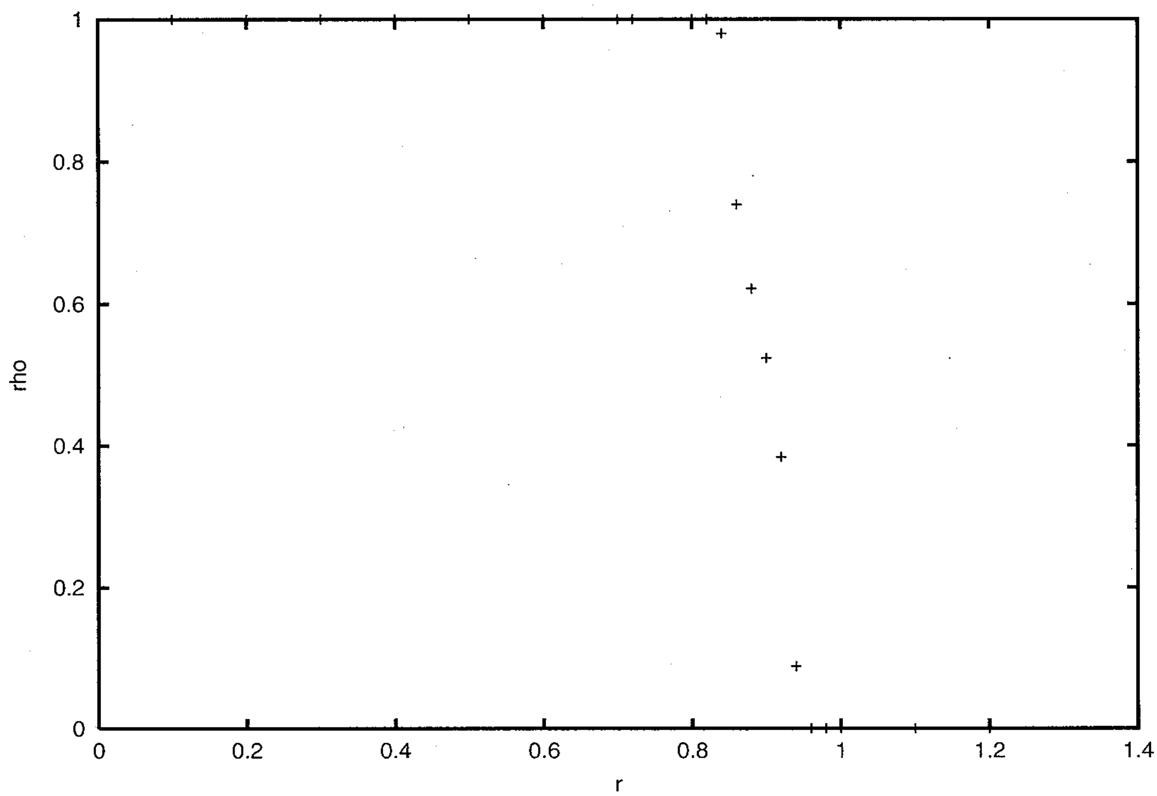


図 3（a）：定常状態におけるρの値　vs　r.
c = 0.1，p = 0.5

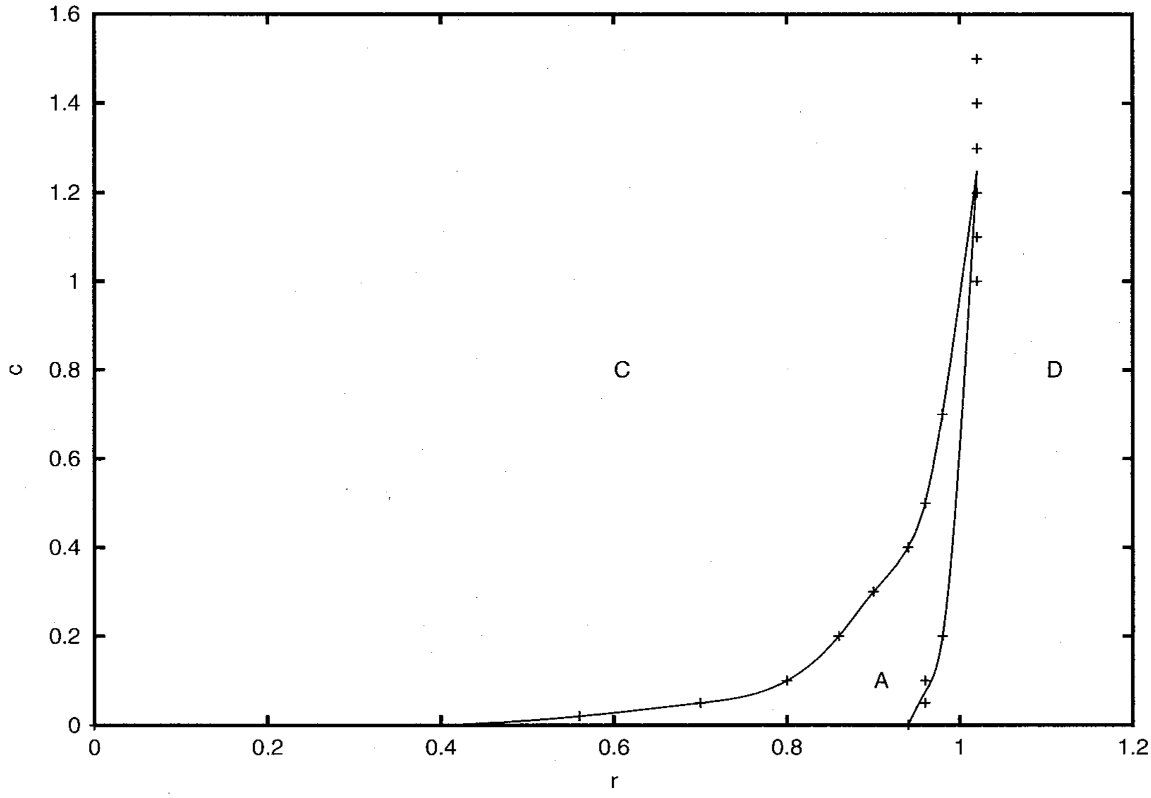
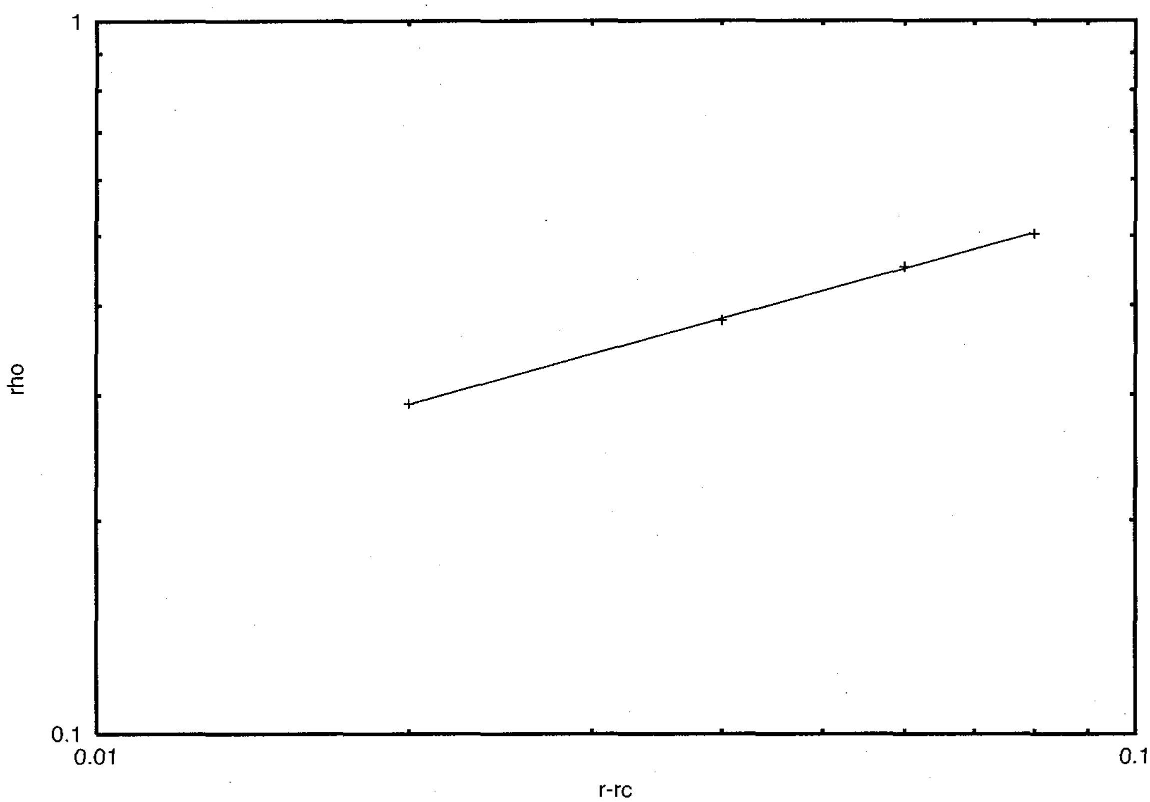


図 4：(r, c) 平面における相図．p = 0.1

4. まとめと展望

本論文では，small-world ネットワーク上で定義された繰り返しゲームのシミュレーションを行った。規則格子の場合と異なり，協調戦略をもつプレーヤーと裏切り戦略をとるプレーヤーとが共存しうることを述べた。これは，対戦するプレーヤーの数が平均として規則格子より多いため，同じ戦略をもったプレーヤー同士がコロニーを作りやすいためであると考えられる。共存相から，裏切り戦略をとるプレーヤーのみからなる相への転移は連続的であった。そして，その転移点近傍では，協調戦略をとるプレーヤーの数が，式 (1) にしたがって変化することを述べた。そのとき，指数βの値は，ネットワーク内のショートカットの数に依存することを述べた。

空間の自由度を考えない繰り返しゲームにおいては，TfT などの戦略をとるプレーヤーをいれないと，全てのプレーヤーが裏切り戦略をとるようになり，協調・裏切りの戦略は共存できない。Novak と May は，プレーヤーを規



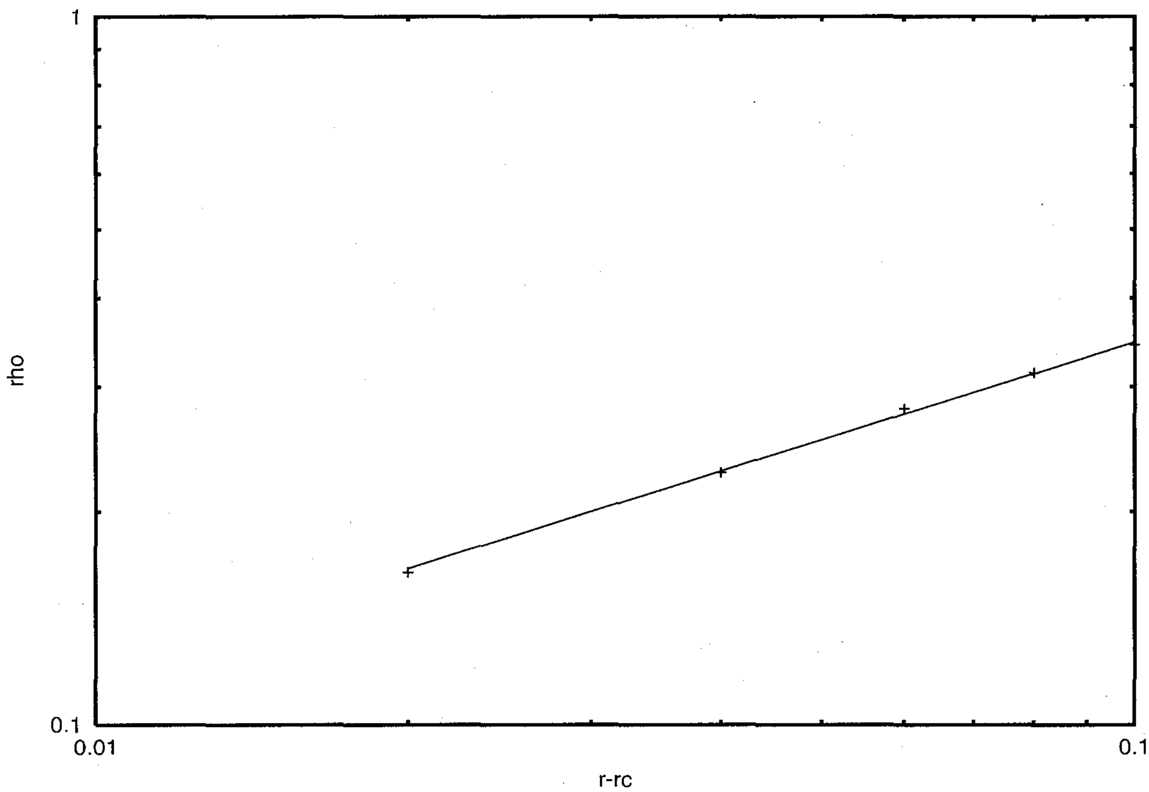


図 5：ρとｒの両対数プロット

則格子点上においた空間的繰り返しゲームにおいて，協調と裏切りの戦略をとるプレーヤーのみから構成される場合においても，それらが共存できることを示した。したがって，協調性が創発するための条件には，空間の次元が重要である。

本論文では，空間の次元とはべつに，ネットワークの結合の仕方が，協調性の創発にとって重要であることを述べた。規則格子に少数のショートカットを導入することが，空間次元を増やすことに相当する効果をもたらすことを示した。また，系のパラメータをもとにした相図を描き，異なる相のあいだの転移について論じた。

社会的なネットワークや人工的なネットワークにsmall-worldネットワークとみなすことができるものが多くあることが，最近分かってきた。そのようなネットワークにおける協調性の創発について，本論文で述べた視点が有用であると思われる。

参考文献

(1) R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).

(2) J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

(3) K. Sigmund, *Games of Life* (Oxford University Pess, Oxford, 1993).

(4) P. A. Danielson (eds), *modeling rationality, morality, and evolution* (Oxford University Pess, Oxford, 1998).

(5) R. H. Frand, *Passions within reason* (Oxford University Pess, Oxford, 1998).

(6) M. Milinski, Nature 325, 433 (1987).

(7) M. A. Nowak and R. M. May, Int. J. Bifur, Chaos 3, 35 (1993).

(8) M. A. Nowak, S. Bonhoeffer, and R. M. May, Int. J. Bifur. Chaos 4, 33 (1993).

(9) M. A. Nowak, and K. Sigmund, Nature 355, 250 (1992).

(10) M. A. Nowak, and K. Sigmund, Nature 364, 56 (1993).

(11) B. A. Hubermann and N. S. Glance, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 90, 7716 (1993).

(12) G. Szabo and C. Toke, Phy. Rev. E 53, 2196 (1998).

(13) A. V. Herz, J. thor. Biol. 169, 65 (1994).
(14) K. Lindgren and M. G. Nordahl, Physica D 75, 292 (1994).
(15) A. Mukherji, V. Rajan and J. R. Slagle, Nature 379, 125 (1996).
(16) M. A. Nowak, S. Bonhoeffer and R. May, Nature 379, 126 (1996).
(17) J. R. N. Chiappin and M. J. de Oliveria, Phys. Rev. E 59 6419 (1999).
(18) G. Szabo, T. Antal, P. Szabo and M. Droz, cond-mat/9911408.
(19) D. J. Watts and S. M. Strogatz, Nature 393, 440 (1998).
(20) D. J. Watts, Small-World, Princeton University Press (Princeton), 1999.
(21) S. Milgram, Psychlogy Today, 2, 60 (1967).
(22) C. Korte and S. Milgram, Journal of Personality and Social Psychology, 15, 101 (1970).
(23) U. Alon, M. G. Surette, N. Baskai and S. Leibler, Nature 397, 168 (1999).
(24) S. L. Pimm, J. M. Lawton and J. E. Cohen, Nature 350, 669 (1991).
(25) R. T. Paine, Nature 355, 73 (1992).
(26) K. McCann, A. Hasings and G. R. Huxel, Nature 395, 794 (1998).
(27) L. A. Amaral, A. Scala, H. Berthelemy and H. E. Stanley, cond-mat/0001458.
(28) P. O. Seglen, J. Am. Soc. Inf. Sci. 43, 628 (1992).
(29) S. Redner, Eur. Phys. J. 4, 131 (1998).
(30) R. Albert, H. Jeong and A. -L. Barabasi, Nature 401, 130 (1999).
(31) M. E. J. Newman, cond-mat/0001118.
(32) M. Barthelemy and L. A. N. Amaral, Phy. Rev. Lett. 82, 3180 (1999
(33) A. Barret, cond-mat/9903323.
(34) R. Nonasson, cond-mat/9903347.
(35) A. Barrat and M. Weigt, Europ. Phys. J. B13, 547 (2000).
(36) M. A. de Mondezes, C. Moukarzel and T. J. P Penna, cond-mat/9903426.
(37) R. Kasturirangan, cond-mat/9904055.
(38) M. E. J. Newman and D. J. Watts, Phys. Rev. E60, 7332 (1999).
(39) R. V. Kulkarni, E. Alamaas and D. Stroud, cond-mat/9905066.
(40) C. F. Moukarzel and M. A. de Mendezes, cond-mat/9905131.
(41) C. F. Moukarzel, cond-mat/9905322.
(42) S. N. Dorogovstsev and J. F. F. Mendes, cond-mat/9907445.
(43) R. V. Kulkarni, E. Almaas and D. Stroud, cond-mat/9908216.
(44) M. E. J. Newman, C. Moore and D. J. Watts, cond-mat/9909165.
(45) L. F. L-Fernandez, R. Huerta, F. Corbancho and J. A. Siguenza, cond-mat/9909379.

(46) C. Moore and M. E. J. Newman, cond-mat/9911492.
(47) C. Moore and M. E. J. Newman, cond-mat/0001393.
(48) N. Mathias and V. Gopal, cond-mat/0002076.
(49) M. E. J. Newman and D. J. Watts, Phys. Lett. A263, 341 (1999).
(50) H. E. Stanley, Introduction to Phase transisions and critical phenomena (Oxford University Press, Oxford, 1971).
(51) S. R. Broodbent and J. M. Hammerlsley, Proc Camb. Phil. Soc. 53, 629 (1957).
(52) J. Blease, J. Phys. C 10, 917; 923; 3461 (1971).
(53) P. Grassberger, Z. Phys. B 47, 365 (1982).
(54) H. K. Janssen, Z. Phys. B 42, 151 (1981).