

3つの戦略をもった空間的進化ゲームの ダイナミクス

今 枝 辰 博

キーワード

spatial evolutionary game	空間的進化ゲーム
Prisoner's dilemma	囚人のジレンマ
Self-organized criticality	自己組織化臨界
persistence	persistence
scaling	スケーリング

1. はじめに

進化ゲーム (evolutionary game) は経済学をはじめとして、政治学、社会学、経営学、社会心理学、生物学などにおいて、古くから多くの研究がなされてきた^(1, 2, 3, 4, 5, 6)。とりわけ、繰り返し囚人のジレンマゲーム (IPD : iterated prisoner's dilemma game) は、協調性の創発と発展のメタファーとしてよく知られている。

Nowak と May は、IPD を空間の自由度を含むように拡張した。その空間的繰り返し囚人のジレンマゲーム (SIPD : spatial iterated prisoner's dilemma game) において、彼らはダイナミカル・フラクタルや空間カオスなどの豊かなダイナミクスを見出した^(7, 8)。さらに、そこでは異なる戦略が空間的に共存しうることを示した。

その後多くの研究がなされているが、SIPD には非平衡相転移が存在することから、統計物理学の手法がその研究に有効であることが期待されている^(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17)。

最近、Szabo らは、協調 (C : cooperation), 裏切り (D : defection), おうむ返し (T : Tit for Tat) の3つの戦略をもつプレイヤーから構成される SIPD において、各プレイヤーに対して、ある一定の確率 p で協調戦略をとることを強制するという外的制約を課したモデルを考えた⁽¹⁸⁾。彼らは、コンピュータ・シミュレーションを行ない、その定常状態において、①3つの戦略をもったプレイヤーが共存できること、② p の値がある範囲内にあるときには、協調戦略をとらせるという強制が、D 戦略をとるプレイヤーの数を増やすという結果をもたらすこと、などを見出した。また、3つの戦略が共存する状態が

自己組織臨界 (SOC : self-organized criticality)^(19, 20) にあることを示唆している。^(21, 22)

本論文では, Szabo らのモデルを拡張して, 各プレイヤーが戦略を更新する際の判断が環境のランダムな変動によってゆらぐようにする。シミュレーションを行ない $p < 1$ では, 各戦略をもつプレイヤーの数の時間変化は, ノイズに対して敏感であることを述べる。このふるまいは, 環境の"温度"によって, 相転移を示す。また, 各プレイヤーが何回その戦略を変えたかを表す確率分布関数を求め, その分布が自己相似な時間発展をする場合があることを述べる。これは, SPID の時間発展の中に, 何らかの普遍性が存在することを意味している。

2. モデル

サイズ n の2次元正方格子を考え, 各格子点にプレイヤーをおく。各プレイヤーは4つの最近接格子上のプレイヤーとゲームを行ない, それぞれのゲームで得た利得をたしあわせた「利得の合計」を記録する。Szabo らにしたがい, 表1の利得行列を考える。 b ($1 < b < 2$) は, パラメータで, その値が大きいほど裏切りへの誘惑が強い。T 戦略については, シミュレーションの計算時間を節約するために多くの対戦について平均したもので近似してある。本論文では, Szabo らの結果と比較するために, $b = 1.7$ とするが, 他の値でもダイナミクスの定性的性質は変わらない。

Szabo らの行ったシミュレーションの手続きは次のとおりである。

- (1) 各プレイヤーは初期状態においてランダムに3つの戦略のうちからひとつを選ぶ。
- (2) ランダムに1人のプレイヤーを選ぶ。
- (3) 確率 p でそのプレイヤーはC戦略を選ぶ。
- (4) 確率 $1 - p$ でそのプレイヤーは次のようにしてゲームを行う
 - ① そのプレイヤーの最近接格子上のプレイヤーからランダムに1人を選び, 自分とその相手の「利得合計」を比べる
 - ② 相手の「利得合計」のほうが大きい場合には, 相手の戦略を自分の戦略とする(*)
- (5) n^2 人のプレイヤーについて (2), (3), (4) を行った後, 時間を1進める。

表1 3つの戦略 C, D, T についての利得行列

	D	C	T
D	(0, 0)	(b, 0)	(0, 0)
C	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)
T	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)

3. シミュレーション

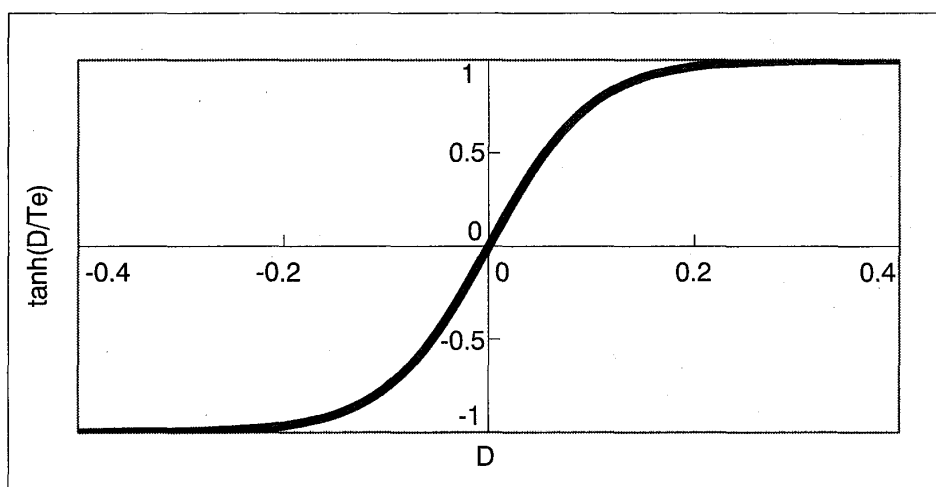
Szabo らのアルゴリズムのうち (*) の部分を次のルールで置き換える。

- ② 自分の「利得合計」と相手の「利得合計」との差 K を求め、確率

$$w = \frac{1}{2} (1 + \tanh(\frac{K}{T_e})) \quad (1)$$

によって、相手の戦略を自分の戦略とする。(**)

図 1: 遷移確率 w . $T_e = 0.1$ としてある。

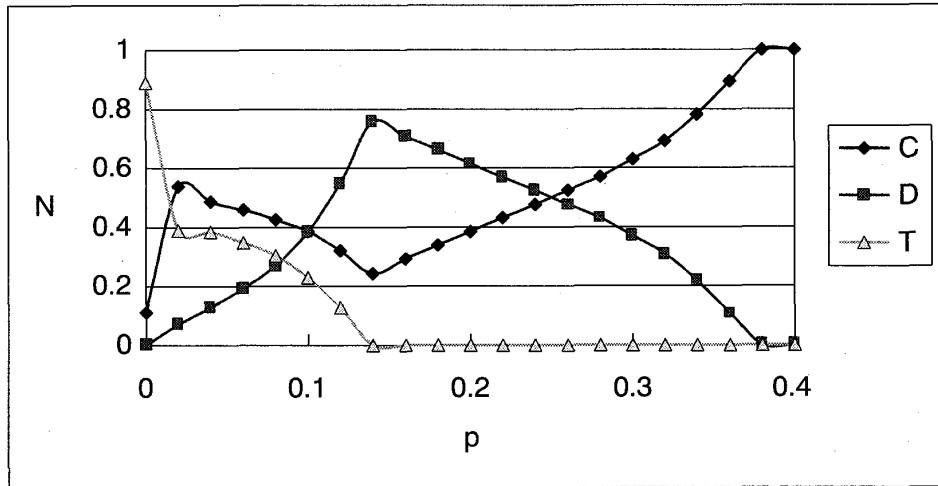


ここで、 T_e は、環境の“温度”を表すパラメータである。⁽¹³⁾ $T_e = 0$ (零温度) とすると、ルール (**) は、Szabo らのルール (*) に帰着する。一方、 $T_e \rightarrow \infty$ (無限温度) では、各プレイヤーは D の値にかかわらずランダムにその戦略を選ぶ。本論文では、 $T_e = 0.1$ とする。 w の概形を図 1 に示す。環境のランダムな変化またはノイズのために、プレイヤーはその戦略の更新を、一定の傾向を保ちながら、“あいまいに” または “ゆらいで” おこなう。

本論文では、 $n = 512$ とし、周期的境界条件を課して、シミュレーションを行った。 p が小さいところ以外では、数十から数千ステップの計算の後、定常状態が得られる。図 2 に $T_e = 0.2$ の場合の、定常状態における相図を示した。概略は、Szabo らの結果と定性的に同じである。すなわち、

- (1) $p = 0$ で、C または D 戦略をもつプレイヤーのみから出発した場合は D のプレイヤーのみからなる定常状態に達する。しかし、初期状態に T 戦略のプレイヤーがいた場合には、C と D からなる定常状態に達する。
- (2) $p \neq 0$ で、C または D 戦略をもつプレイヤーのみから出発した場合はすべての p に対して C 戦略をもつプレイヤーの数が増える。C, D, T からなる初期状態から出発した場合には、 $p < 0.318$ では、外的制約は T の数を減らし、T によって維持

図2：定常状態における相図。 $Te = 0.1$ 。 C, D, Tの核戦略を持ったプレイヤーの数を p に対してプロットしてある。

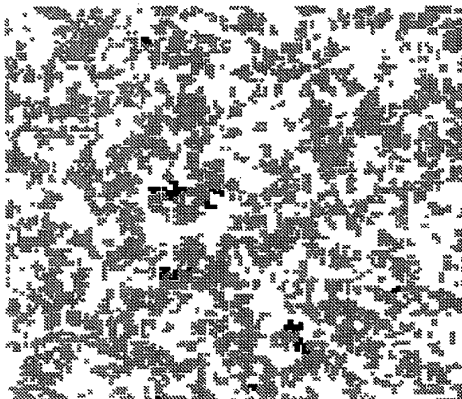


されていた協調の割合を減らす。 $p > 0.318$ では、協調の割合を増やす。

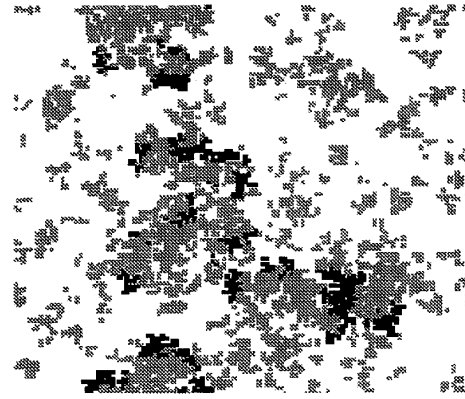
(3) $p > 0.367$ では、C 戦略のみが存在する。

(4) 共存しているある戦略が絶滅することに対応して、 $p \sim 0.318$ と $p \sim 0.367$ で、2 次の非平衡相転移が存在する。

図3：プレイヤーの空間分布 $p=0.02$, $Te=0.1$ C戦略は白、D戦略は黒、T戦略は灰色で表してある。



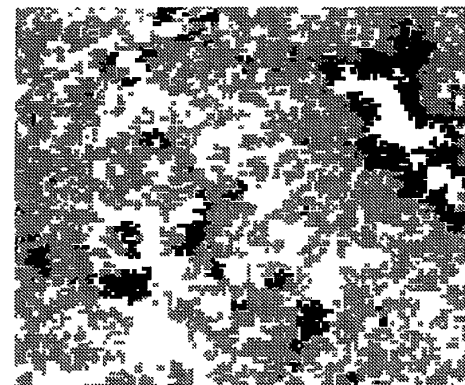
(a) $t = 50$



(b) $t = 100$



(c) $t = 150$

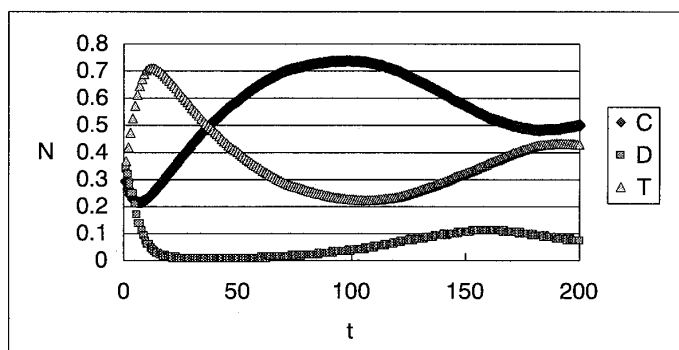


(d) $t = 200$

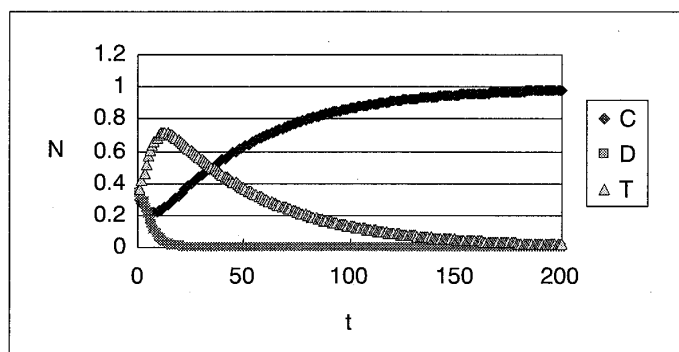
$p=0.02$ の場合について、各戦略の空間分布の時間変化を図3に示す。D戦略は、CとTの戦略を持つプレイヤーが作るドメインの境界にあり、他の戦略のドメインを侵食しようとしている。そのような状況における、各戦略を持つプレイヤーの数の時間変化を図4(a)に示す。大きく振動しながら定常状態に近づいている。この様子は、系のサイズを変えても変わらない。また、 $p \rightarrow 0$ とすると、減衰の緩和時間が長くなる。このような減衰振動は、被食者・補食者系などにおいても見つかっており、自己組織化臨界（SOC：self-organized criticality）の存在を示唆していると考えられている。^(19, 20)

一方、図4(b)に示すように、零温度の場合には、D戦略が速やかに絶滅している。これは系が有限であるために起こった有限サイズ効果であると考えられる。 n を充分大きくすれば、3戦略の共存が見出せると思われるが、コンピュータの現実的な計算時間の範囲では困難である。図4(c)に、(1)の代わりに、 $w = 1/2$ としたときの様子を示した。これは、 $Te = \infty$ の場合に対応し、最終的にD戦略のみが存在するようになる。すなわち、 p の値を一定にしてノイズのレベルを上げていくと、戦略の共存状態に対して非平衡相転移が起こる。

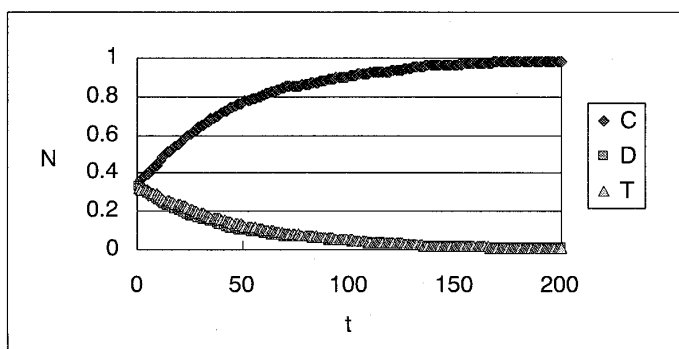
図4：プレイヤーの数の時間変化 いずれも、 $p=0.02$



(a) $Te = 0.01$



(b) $Te = 0$



(c) $Te = \infty$ ($w=1/2$)

4. persistence 分布関数

前節で見たように、臨界点近傍での減衰振動は緩和時間が長いために、数値的にその特徴をとらえるのが困難である。

本論文では、そのようなトランジェントなダイナミクスを記述するためにプレイヤーが何回その戦略を変えたかという確率分布関数を用いることを提案する。⁽²³⁾ n^2 人のプレイヤーのうちある時刻 t までに m 回意見を変えたプレイヤーの数の割合を $P_m(t)$ とする。 $\sum P_m(t) = 1$ である。図 4 (a) に対応した場合の、モーメント $\langle m \rangle = \sum m P_m(t)$ の時間変化を図 5 にプロットした。明らかに、 $\langle m \rangle \sim t$ が成り立っている。 $P_m(t)$ は、時間とともにその形を変えるが $\langle m \rangle P_m(t)$ と $m/\langle m \rangle$ について異なる時間のデータをプロットすると図 6 に示すように、ひとつの曲線で近似することができる。すなわち、スケーリング則

$$P_m(t) \sim 1/\langle m \rangle f(m/\langle m \rangle), \quad (2)$$

が成り立っている。

図 5 : persistence 分布関数のモーメント $\langle m \rangle$ の時間変化

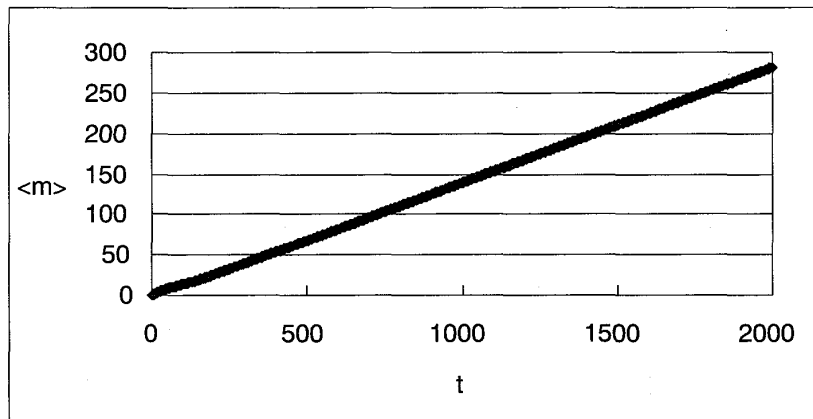
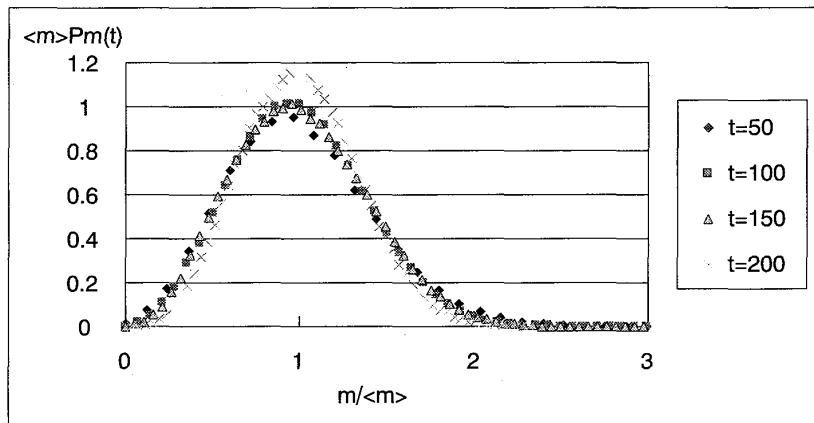


図 6 : persistence 分布関数のスケーリングプロット



5. まとめ

本論文では、3つの戦略をもった空間的進化ゲームについて、Szaboらのモデルを、環境の変化によるノイズの効果を含むように拡張した。シミュレーションの結果、Szaboらのモデルの定常状態は概ねノイズに対してロバストであった。しかし、臨界点 ($p = 0$) 近傍のダイナミクスはノイズに対して敏感であった。そのダイナミクスを論じる手がかりとして、persistence 確率分布関数を用いることを提案した。じっさいに、自己相似な時間発展する場合を見出した。

本稿では紙数の制限のために、得られた結果のすべてについて論じることができなかった。たとえば、本論文のモデルはSzaboらのモデルを有限温度に拡張したものである。明らかに零温度と無限温度では系のダイナミクスは異なるから、温度 T_e を変化させていけば、相転移が起こる。⁽²⁵⁾ このことについて詳しく論じる余裕がなかった。また、戦略が共存する状態は、自己組織化臨界であると期待されるが、その根拠についての議論を割愛した。

本論文で論じたモデル以外に、SIPDとして、多種・多様なモデルを考えることができる。また戦略を更新するプレーヤーを格子上で順番に選び出すかランダムに選ぶかといったアルゴリズムの詳細によって、得られる結果が異なることもあることも報告されている。⁽¹¹⁾ さまざまなノイズに対して得られた結果がロバストであるかという問題とあわせて、広範な研究が必要である。その際に、本論文で述べたようなpersistence 分布関数のスケーリング則は、ダイナミクスの普遍性の分類に有効であるかもしれない。

参考文献

- (1) R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
- (2) J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- (3) K. Sigmund, *Games of Life* (Oxford University Press, Oxford, 1993).
- (4) P. A. Danielson (eds), *modeling rationality, morality, and evolution* (Oxford University Press, Oxford, 1998).
- (5) R. H. Frand, *Passions within reason* (Oxford University Press, Oxford, 1998).
- (6) M. Milinski, *Nature* 325, 433 (1987).
- (7) M. A. Nowak and R. M. May, *Int. J. Bifur. Chaos* 3, 35 (1993).
- (8) M. A. Nowak, S. Bonhoeffer, and R. M. May, *Int. J. Bifur. Chaos* 4, 33 (1993).
- (9) M. A. Nowak, and K. Sigmund, *Nature* 355, 250 (1992).
- (10) M. A. Nowak, and K. Sigmund, *Nature* 364, 56 (1993).
- (11) B. A. Hubermann and N. S. Glance, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 90, 7716 (1993).
- (12) G. Szabo and C. Toke, *Phy. Rev. E* 53, 2196 (1998).
- (13) A. V. Herz, *J. theor. Biol.* 169, 65 (1994).
- (14) K. Lindgren and M. G. Nordahl, *Physica D* 75, 292 (1994).
- (15) A. Mukherji, V. Rajan and J. R. Slagle, *Nature* 379, 125 (1996).
- (16) M. A. Nowak, S. Bonhoeffer and R. May, *Nature* 379, 126 (1996).
- (17) J. R. N. Chiappin and M. J. de Oliveria, *Phys. Rev. E* 59 6419 (1999).

- (18) G. Szabo, T. Antal, P. Szabo and M. Droz, cond-mat/9911408.
- (19) P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. 59, 381 (1987).
- (20) P. Bak, K. Chen and C. Tang, Phys. Rev. Lett. A 147, 297 (1990).
- (21) P. Grassberger and K. Kantz, J. Stat. Phys. 63, 685 (1991).
- (22) H. M. Broler and P. Grassberger, Phys. Rev. E 56 R4918 (1997).
- (23) L. Franchebourg, P. L. Krapivsky and E. Ben-Naim, Phys. Rev. E. 54, 6186 (1996).
- (24) J. E. S. Socolar and G. Grinstein and C. Jayaprakash, Phys. Rev E 47, 2366 (1993).
- (25) A. J. Bray, Adv. Phys. 43, 357 (1994).