

# Small-world ネットワークにおける 投票者モデルのダイナミクス

今 枝 辰 博

## キーワード

small-world (small-world)

投票者モデル (voter model)

persistence (persistence)

スケーリング則 (scaling law)

べき乗則 (power law)

クロスオーバー (crossover)

## 1. Small-world ネットワーク

地球上に住む約 60 億人の人の中から、無作為に 2 人を選び出す。そのうちの一人から出発して知人を順々にたどっていくと、驚くほど少ないステップ数でもう一方の人に連なっていることが知られている<sup>(1)</sup>。社会心理学者である Milgram は、このような社会的ネットワークの構造について実験的研究を行い、いわゆる“six degrees of separation”を見出した<sup>(2,3)</sup>。われわれ自身の経験からも確かに“世間は狭い”と感ずることがある。しばしば、うわさが“口コミ”によって驚くほど早く、広範に伝わるのもこの理由によるのだろう。実際にこの“small-world phenomenon”が巷の話題になることも珍しくない<sup>(4,5,6)</sup>。

このように、2 人の人を結ぶ連なりの数がネットワーク全体の人の数に比べて小さいとき、「small-world 効果 (small-world effect)」を示すという。このような社会的ネットワークの構造が研究対象となるのは、それが、人と人とのコミュニケーションにとって重要だからである。その意味で、現在急速に発達しているインターネットを中心とした電子的なネットワークにおいて、いかなる構造が形成され、またそれが人と人とのコミュニケーションに対してどのような変化をもたらすのかは大変興味深い問題である。また、情報以外に、人と人との接触によって伝わるものに病気がある。伝染する病気の流行に対してもネットワークの構造は本質的な影響を与えるだろう<sup>(1)</sup>。

これらの社会的ネットワークとは別に、神経ネットワーク<sup>(1)</sup>、化学反応系のネットワーク<sup>(7)</sup>、food web<sup>(8,9,10)</sup>などの自然界に見られるネットワーク、また電力網<sup>(1)</sup>、航空網<sup>(11)</sup>などの人工的ネットワークもそれらの構造について研究が行われている。さらに、科学論文における参照のネットワーク<sup>(12,13)</sup>、共演した映画俳優のネットワーク<sup>(1)</sup>、WWWにおけるリンクのネットワーク<sup>(14)</sup>などもその構造に興味深い性質が見出されている。

このようなネットワークをどのように特徴づけ、モデル化するか、またその構造に共通な性質があるのか、さらにネットワークが形成されるメカニズムに普遍性があるのか、といった問題が数年前から物理学者の関心を呼んでいる<sup>(15)</sup>。

その端緒となったのは、Watts と Strogatz による small-world ネットワークモデルの成功である<sup>(16)</sup>。彼らは、規則正しく構成されたネットワークに少数のショートカットを作ることによって、small-world 効果が劇的に現れることをコンピュータシミュレーションによって見出した。その後、その劇的変化の特徴づけ、small-world ネットワークの性質、ネットワーク上で定義された動的モデルなど多くの研究が続いている<sup>(17-34)</sup>。

本論文では、small-world ネットワーク上で定義された確率モデルを考える。投票者モデルのコンピュータシミュレーションを行い、persistence 確率を求める。さらに persistence 指数の表式が small-world ネットワークを特徴づける

ただ1つの長さによってスケールされることを論じる。

## 2. small-world model

$N$  人の人から構成されるネットワークを考える。平均としてそれぞれが  $z$  人の知人をもっているとする、全体では  $Nz/2$  の結びつきがある。このネットワークに対する最も簡単なモデルはランダムグラフ (random graph) によるものである<sup>(35)</sup>。すなわち、 $N$  個の点 (バーテックス: vertex) を考え、そのなかでランダムに選んだ  $Nz/2$  の対の間に線 (エッジ: edge) をひく。このランダムグラフは small-world 効果を示す。実際にひとつのバーテックスから、グラフ上にあるすべてのバーテックスに行き着くためのステップ数は  $\ln N / \ln z$  である。したがって、 $N$  の値が大きくなるほど、そのステップ数とバーテックスの数の比は小さくなる。

しかし、実際の社会的ネットワークでは、 $A$  の知人である  $B$  と  $C$  も互いに知人である可能性が大きい。clustering というこの性質はランダムグラフによって表せない。

ランダムグラフの対極にあるモデルとして、規則格子 (regular lattice) がある。規則格子では  $N$  個のバーテックスを  $d$  次元超格子空間上の格子点におき、その最隣接格子点上のバーテックスを結びつけてエッジとする。このようにして clustering の効果は取り入れられているが、small-world 効果はまったくない。

Watts と Strogatz は、これらの2つのモデルを極限として含む新しいモデル (small-world model) を考えた<sup>(16)</sup>。簡単のために  $d = 1$  として等間隔に並んだ  $N$  個の格子点を考える。各格子点を  $z$  個の最隣接格子点と結びつける。すなわち配位数を  $z$  とする。周期的境界条件を課せば、図1(a)のようなリング状のネットワークとなる。次に各リンクを順々にたどり、確率  $p$  でつなぎかえる。すなわち、その片方の端を残りの格子点の中からランダムに選んだ格子点に移動させる (図1(b))。  $p$  の値が十分に小さければこのネットワーク

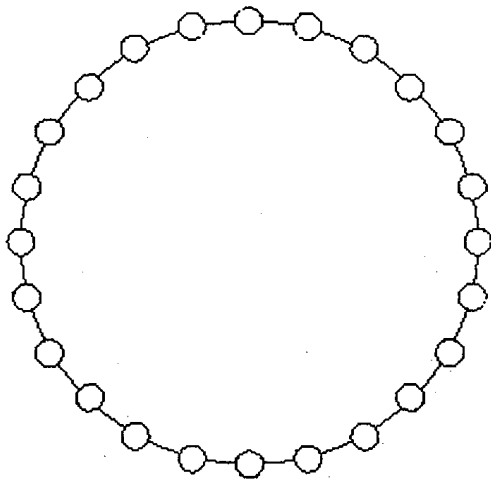


図 1(a) 1次元格子に周期的境界条件を課して構成したリング状のネットワーク  $N = 24, k = 1$  としてある。

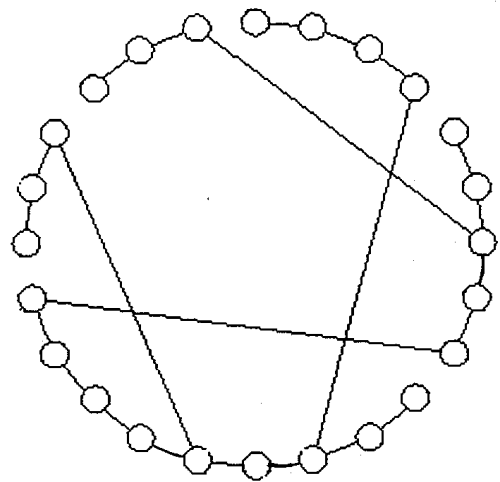


図 1 (b) Watts-Strogatz の方法によって構成した small-world ネットワークの例

を表すグラフはほぼ規則的である。また 1 バーテックスあたりの配位数は平均として  $z$  であり、つなぎかえる前と変わらない。しかし、図 1 (b) にみられるような離れた格子点を結びつけたショートカットがあることによりこのネットワークは small-world 効果を示す。社会的ネットワークでいえば、遠く離れた土地から引っ越してきた人が作るリンクがその例であろう。

Newman と Watts は、このモデルをよりあつかいやすいように、次のように改良した<sup>(20)</sup>。図 1 (a) のリング状のネットワークを作るところまでは同じである。そこでランダムに選んだバーテックスの対に対して  $Nz/2$  あたり  $p$  の確率でショートカットを加える (図 1 (c))。したがってグラフには平均として  $Nz/2 \times p$  のショートカットが存在することになり、 $p$  の値が充分小さいときは Watts と Strogatz のモデルをよく近似すると考えられる。Watts と Strogatz のモデルではリンクをつなぎかえる際にネットワークが分離してしまう可能性があるが、Newman と Watts のモデルでは、このようなことはない。また、繰り込み群などの理論的取りあつかいになじみやすいために最近はこのモデルが多く用いられる。

このようにして定義された small-world モデルについて多くのコンピュータ

シミュレーションがなされ興味深い結果が得られている。その中で最も重要であるのはバーテックス間の平均最短距離  $l$  が次のようなスケーリング形に表せることである。

$$l = \frac{N}{2z} F(Nkp) \quad (1)$$

ただし、ここで  $k = z/2$  である。実際にシミュレーションを行った結果を図2に示す。 $l$ を求めるためにDijkstraのアルゴリズム<sup>(36)</sup>を用いた。明らかに(1)が成り立っている。少数の

ショートカットがあることによりバーテックス間の平均最短距離  $l$  は劇的に減少する。すなわち, small-world 効果を表している。

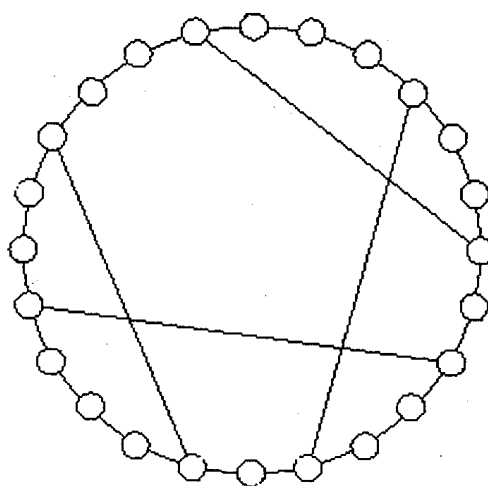


図 1 (c) Newman-Watts の方法によって構成した small-world ネットワークの例

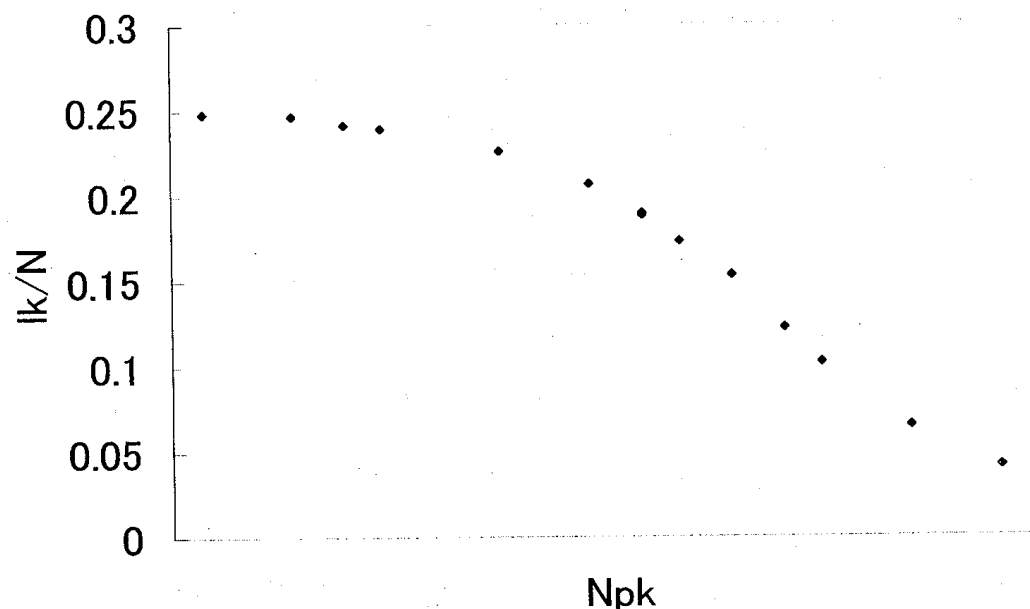


図2 small-world ネットワークにおけるバーテックス間の平均距離

$$N = 512, 1024, 2048, p = 0.01, 0.02, \dots, 0.1, k = 1, 2, \dots, 20$$

それぞれの点は、初期条件が異なる 300 回の試行について平均して得た値である。これらの点は、1 つの変数  $N_{kp}$  の関数として近似できる。

Watts と Strogatz は small-world ネットワーク上での cellular automata, 繰り返し囚人のジレンマゲーム, 結合振動子系のダイナミクスを調べている<sup>(1)</sup>。さらに, Moore と Newman は, small-world ネットワーク上での伝染病の伝播について研究を行い, パーコレーションの閾値との関係を明らかにしている<sup>(32)</sup>。また, Kulkarni らは, Bak-Sneppen モデルにより, 種の共進化に対する small-world 効果を数値的に研究している<sup>(29)</sup>。

### 3. 投票者モデルのダイナミクス

投票者モデルは, 自明でない (non-trivial) ダイナミクスを示す最も簡単な確率モデルのひとつとして多くの研究がなされている<sup>(37-43)</sup>。本論文では, この投票者モデルを small-world ネットワーク上で定義し, コンピュータシミュレーションによって, そのダイナミクスに対する small-world 効果を調べる。

投票者を図 1 (c) のような small-world ネットワーク上の各バーテックスにおく。投票者は時刻  $t$  において意見 0 か 1 をもつ。次の時刻での自分の意見を決めるために投票者は, まずリンクされているバーテックスにある, 他の投票者の意見を調べる。そして, その多数派の意見を自分の意見とする。0 と 1 の意見をもつものが同数である場合には, 2 つの意見のうちのどちらかをランダムに選んで自分の意見とする。ネットワーク上のすべての投票者についてこのことを行い, 時刻を 1 進める。

このようにして系を時間発展させると,  $p = 0$  の場合には, 最終的に全投票者の意見が一致する状態に到達することが証明されている。その時間発展の様子を図 3 (a) に示す。 $p = 0.01$  であるネットワーク上で, 投票者の意見について図 3 (a) と同じ初期条件から出発した場合の時間発展を図 3 (b) に示す。少数のショートカットの存在が意見 1 (または 0) をもった投票者の空間分布を大きく変えているのがわかる。

投票者モデルのダイナミクスを記述する量として時刻 0 から時刻  $t$  までの間に意見を一度も変えなかった投票者の割合である persistence 確率  $P(t)$  が

## Small-world ネットワークにおける投票者モデルのダイナミクス



(a)  $p = 0$



(b)  $p = 0.01$

図3 意見1(または0)をもった投票者の分布の時間変化。投票者を一列に並べ、上から下へ1ずつ時間を進めて表示してある。

(a)  $p = 0$  (b)  $p = 0.01$  ともに,  $N = 200$ ,  $k = 1$  で, 投票者についての初期条件は同一である。

ある<sup>(39,40)</sup>。  $p = 0$  で  $k = 1$  の場合には、その振る舞いは、べき乗則

$$P(t) \sim t^{-\theta} \quad (2)$$

にしたがう。 $\theta$ の値は解析的に計算されており  $3/8$  である<sup>(41)</sup>。実際にシミュレーションを行った結果を図4に示す。 $N = 512, 1024$  の場合について、それぞれ初期条件が異なる300回の試行の結果を平均してある。べき乗則(2)はよく成り立っており、 $\theta$ の値は厳密解に充分近い。また、この結果は系のサイズ  $N$  に依存しないことがわかる。

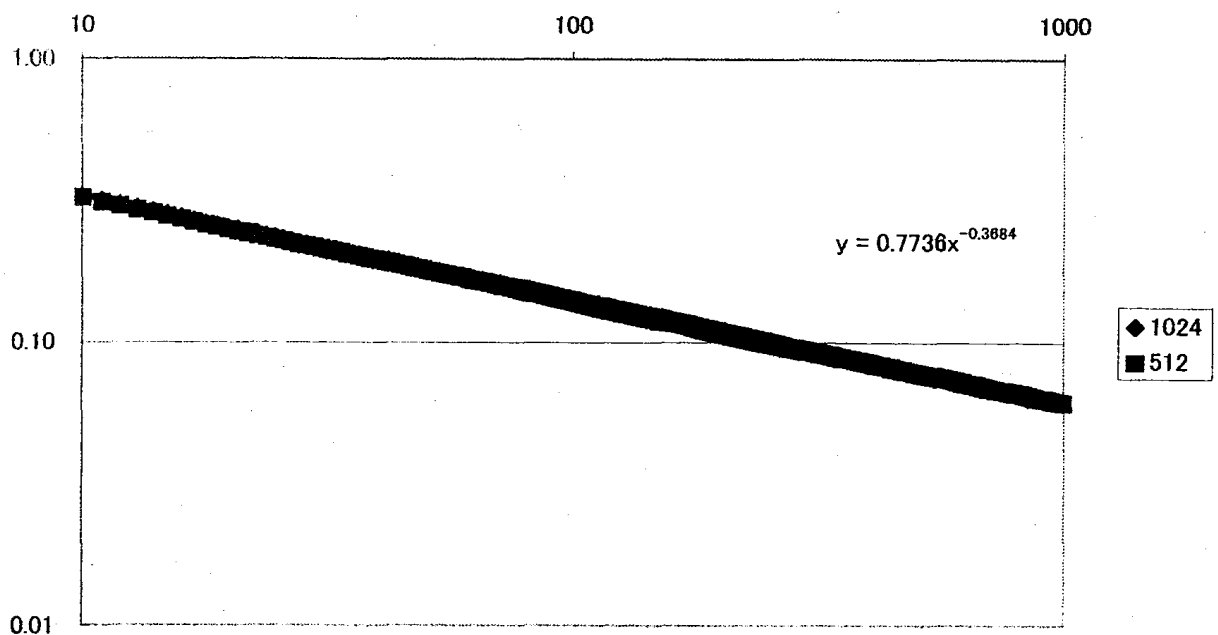


図4  $P(t)$  vs  $t$   $N = 512, 1024$   $p = 0, k = 1$

それぞれの値は初期条件が異なる300回の試行についての平均である。以下の図5も同様である。

small-world 上でのダイナミクスを考える前に、 $p = 0$  で  $k > 1$  である場合を調べる。図5に、さまざまな  $k$  の値に対する  $P(t)$  の時間変化をプロットした。 $k \ll N/2$  では、べき乗則(2)にしたがう時間領域があるが、 $k$  の値が  $N/2$  に近づくと  $P(t)$  が有限の値  $P(\infty)$  に“凍結 (freeze)”されている。これは各バーテックスがそれぞれ他のすべてのバーテックスと結びついたネットワークを考え



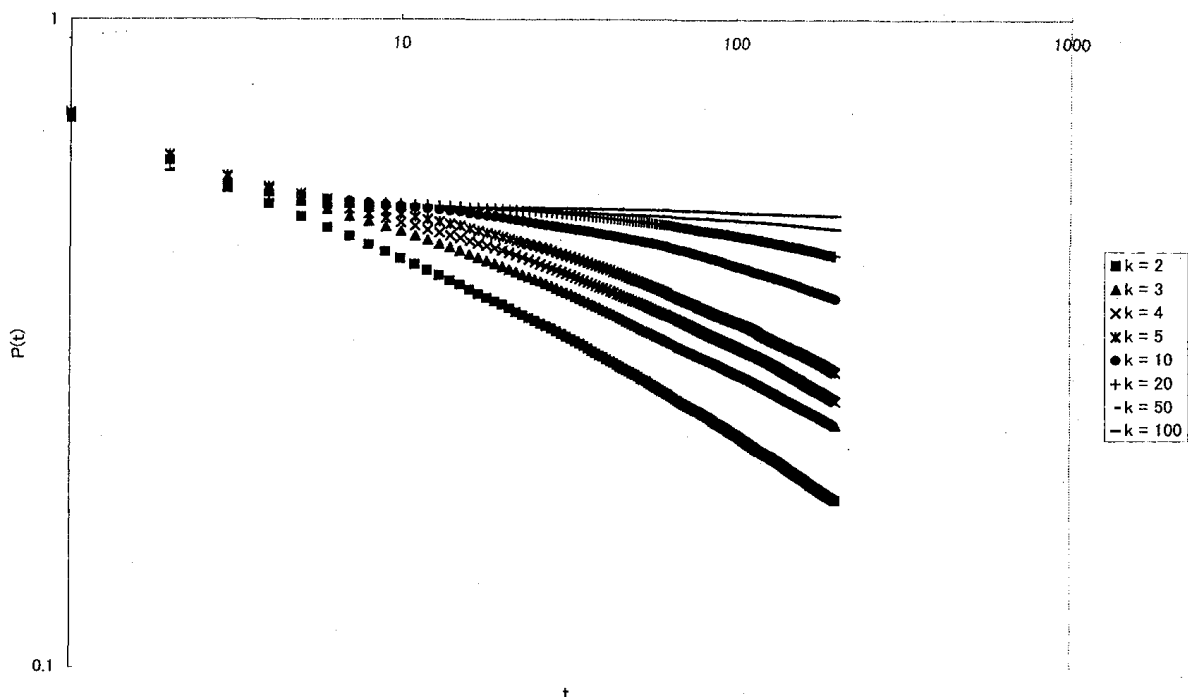


図5  $P(t)$  vs  $t$   $N = 512, 1024$   $p = 0$ ,  $k = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100$

れば理解できる。そのような場合には系は初期状態における多数派の意見に急速に統一されるであろう。本論文ではこれ以上触れないが、この凍結は無秩序系のダイナミクスとして興味ある問題である。

$k = 2, 3, 4$  に対してはべき乗則が成り立つ時間領域で persistence 指数  $\theta$  を見積もることができる。その結果を図6に示す。 $\theta$  の  $k$  に対する依存性は、べき乗則

$$\theta(k) = \theta(1)k^{-\beta} \quad (3)$$

によって近似することができる。ここで計算したデータからは  $\beta$  の値を  $0.39 \pm 0.01$  と見積もることができる。

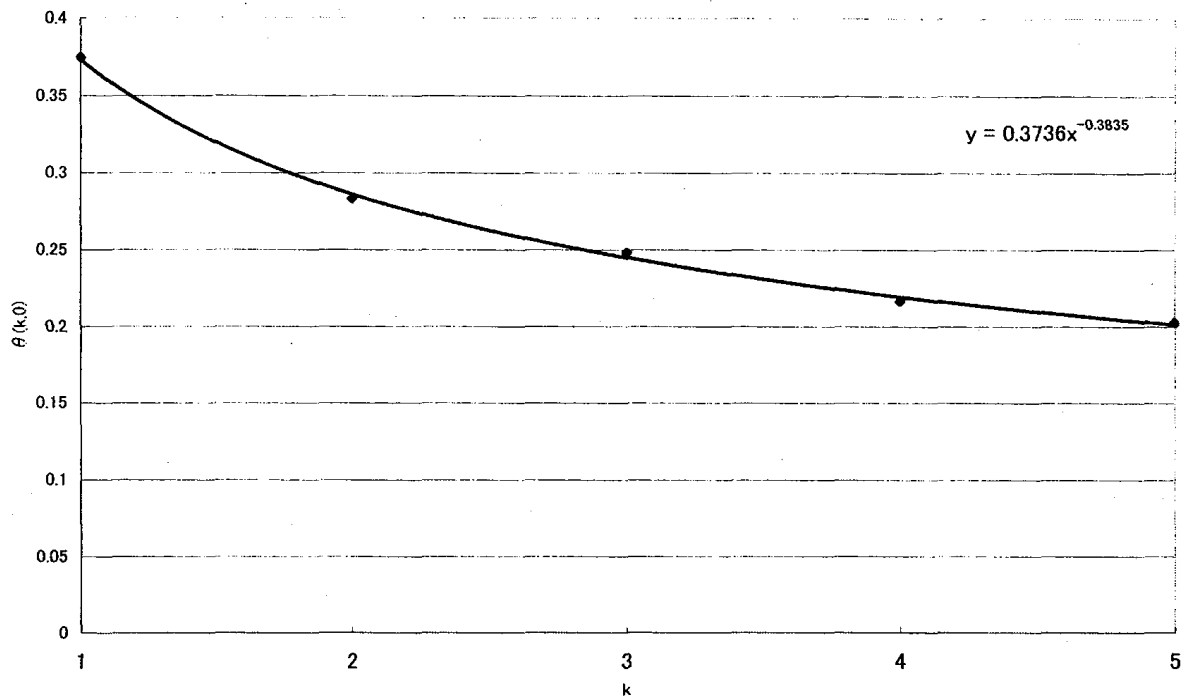


図6  $\theta(k, 0)$  vs  $k$

#### 4. small-world ネットワーク上の投票者モデル

$p = 0.1$  と  $p = 0.9$  の場合について、 $P(t)$  の時間発展を図7に示す。 $p = 0.1$  の場合には  $10 \leq t \leq 200$  でべき乗則がよく成り立っている。またこの時間領域では系のサイズ  $N$  に対する依存性はみられない。一方、 $p = 0.9$  の場合には、 $t \leq 30$  ではべき乗則が成り立っておりサイズ依存性もないが  $t \geq 30$  では振る舞いが異なる。すなわち  $P(t)$  は有限の値  $P(\infty)$  に漸近的に近づく。すなわち最終状態においても一度も意見を換えたことのない投票者が存在する。そしてその漸近値と近づき方は系のサイズに依存している。persistence についての、この振る舞いは空間次元が5以上のイジングモデル、2次元  $q$  状態で  $q > 4$  であるポッツモデルなどにおいて見出されている<sup>(42,43)</sup>。

この最終状態への接近をより詳しくみるためには、 $P(t) - P(\infty)$  を時間についてプロットするのが有用である<sup>(44)</sup>。実際、図8に示すように、次のような指数関数則が成り立っている。

$$P(t) - P(\infty) \sim e^{-\lambda t} \quad (4)$$

Small-world ネットワークにおける投票者モデルのダイナミクス

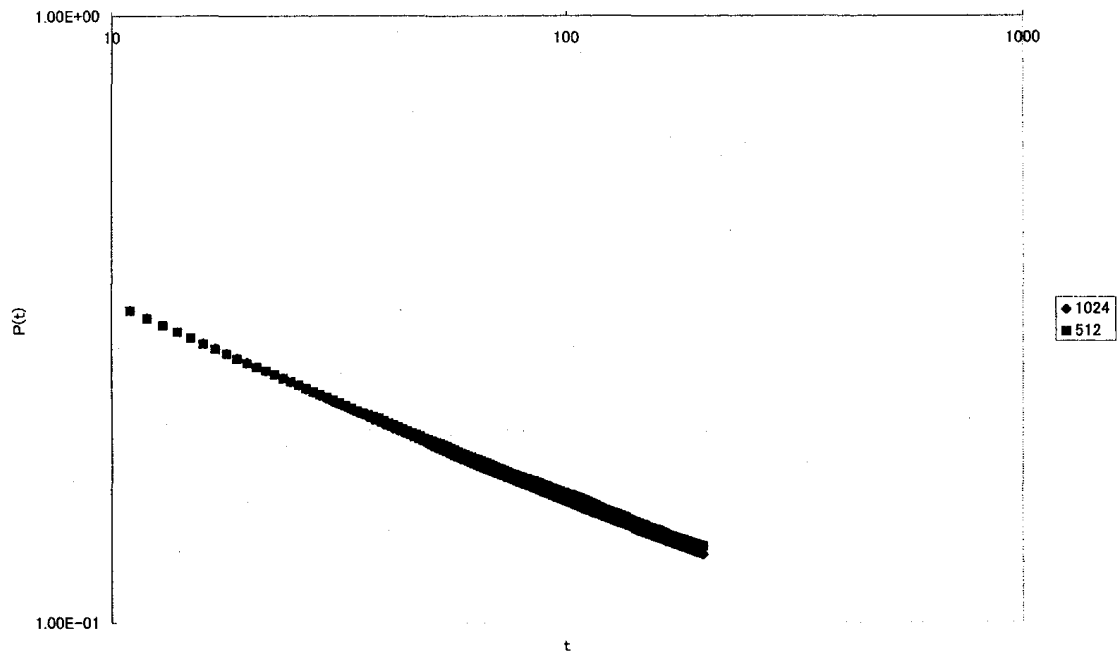


図 7 (a)  $P(t)$  vs  $t$   $p = 0.1$

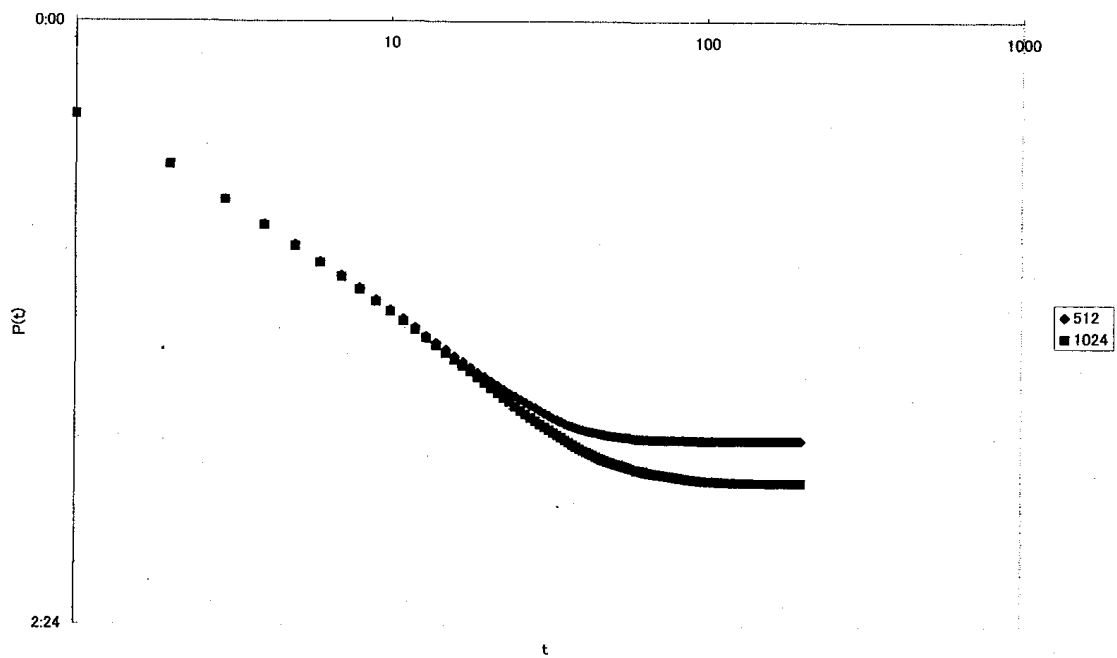


図 7 (b)  $P(t)$  vs  $t$   $p = 0.9$

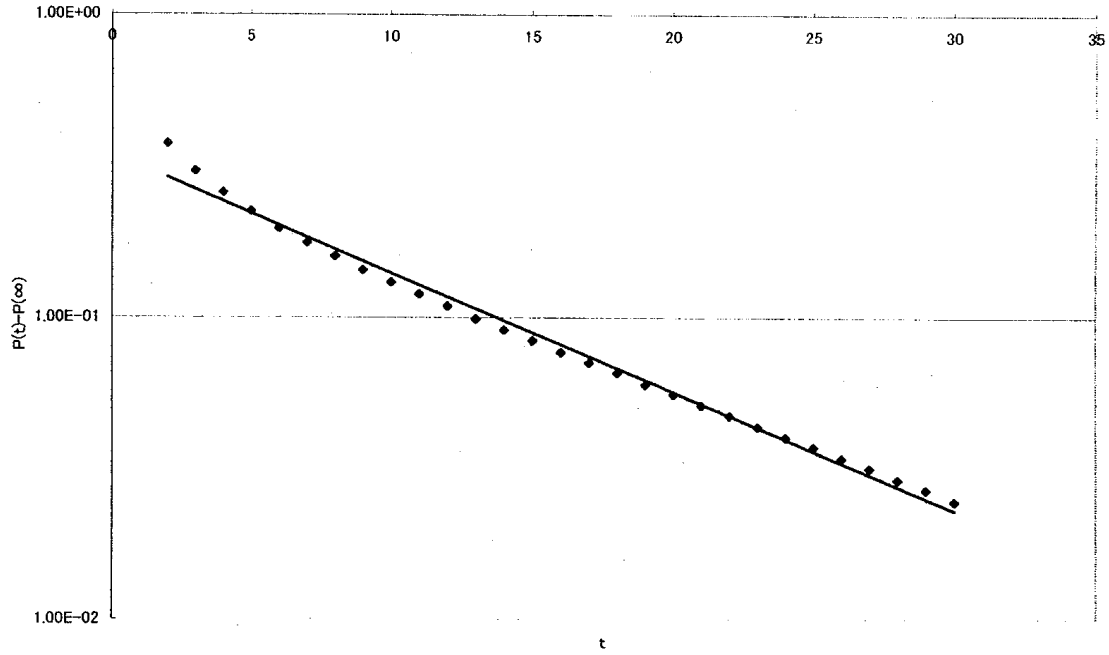


図8  $P(t) - P(\infty)$  vs  $t$

べき乗則が成り立っている領域から指数関数則の領域へのクロスオーバー (cross over) は,  $N$  の値が大きいほど早い時刻に起きる。またその時刻は  $p$  にも依存する。

べき乗側が成り立っている領域で,  $k = 1, 2, 3, 4$  の場合についていくつかの  $p$  に対する  $\theta$  の値を図9に示す。これらのデータを  $\theta(k, p)/\theta(k, 0)$  と  $kp$  についてプロットすると, データは直線状に収束している (図10)。図にはガイドのために直線  $y = -2x + 1$  を描きいれてある。  $\theta(k, p)/\theta(k, 0)$  が変数  $kp$  についてスケールされるとし, そのスケール関数が解析的であると仮定すると,

$$\theta(k, p) = \theta(k, 0)f(kp) \quad (5)$$

であり,

$$f(x) = 1 - 2x \quad x \ll 1 \quad (6)$$

というスケーリングが可能であることを示唆している。

small-world ネットワークを特徴づける変数  $l$  はショートカットの密度  $Nkp$  によってスケールされた。これは, 長さを特徴づける量として  $\xi = 1/kp$  が存在することを意味する。したがって (5) は persistence 確率のダイナミクスがた

# Small-world ネットワークにおける投票者モデルのダイナミクス

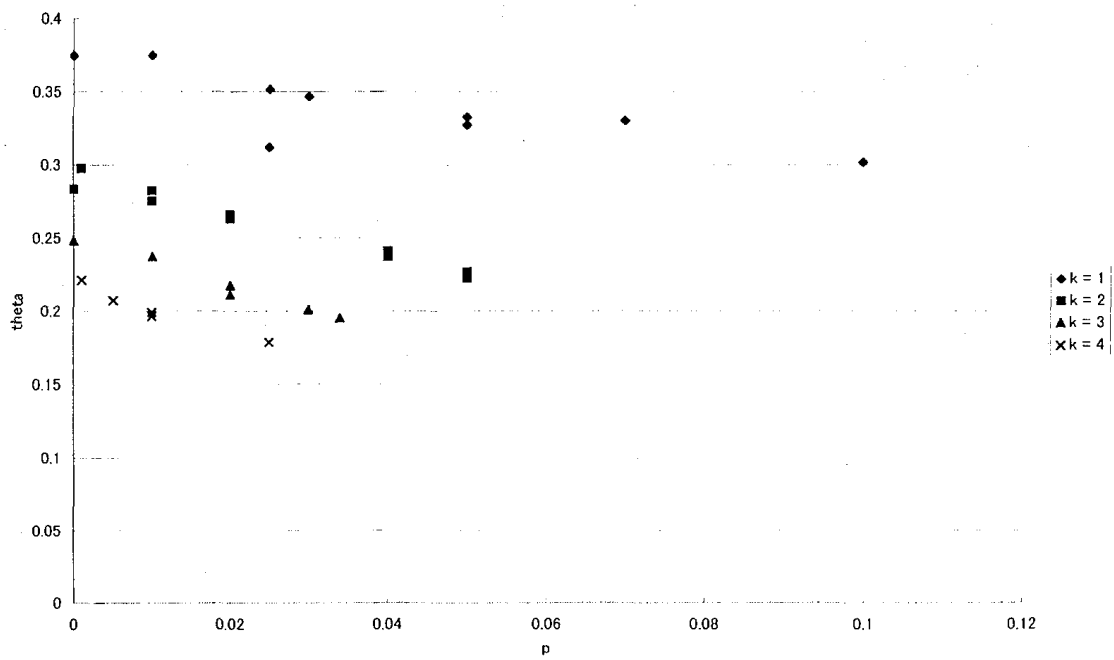


図9  $\theta(k, p)$  vs  $p$   $k = 1, 2, 3, 4$  また,  $N = 512, 1024$  のデータを重ねてプロットしてある。

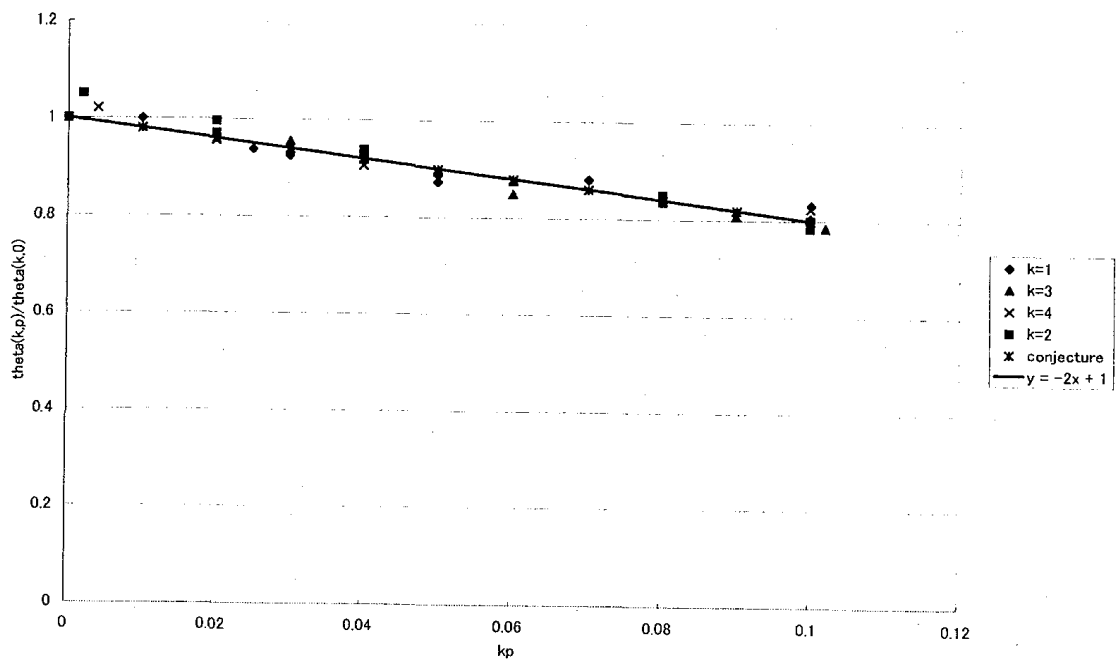


図10 図9のデータを  $\theta(k, p) / \theta(k, 0)$  と  $kp$  についてプロットしてある。スケーリング (5), (6) が可能であることを示唆している。

だ一つの長さによって支配されることを表している。また、この長さは  $p$  が 0 に近づくにつれて発散する。このことと (5) をあわせると臨界現象に類似性があることがわかる<sup>(45)</sup>。small-world ネットワークの性質については、すでにこのことが指摘され、いくつかの議論がなされている。本論文で見出した類似性はダイナミクスについてのものであり、それらのスタティクスにおける類似性と関連があると考えられるが、その数理的あるいは物理的根拠は明らかでない。

## 5. まとめ

本論文では、small-world ネットワーク上で定義された投票者モデルについてコンピュータシミュレーションをおこない、そのダイナミクスを調べた。時刻 0 から  $t$  までの間に意見を一度も変えなかった投票者の割合  $P(t)$  を計算しその時間発展を明らかにした。その内容は次のように要約できる。

### (1) $P = 0$

図 1 (a) のようなネットワークにおいて、配位数  $z$  が系のサイズ  $N$  に比べて十分小さい場合にはべき乗則 (2) にしたがって減少する。このときそれぞれの  $k$  について求めた persistence 指数  $\theta$  の値は、べき乗則 (3) によって近似できる。 $k$  の値をさらに増加させると  $P(t)$  は凍結された有限の値  $P(\infty)$  に漸近する。 $P(\infty)$  の値は  $N$  によって異なる。

### (2) $p > 0$

図 1 (a) のネットワークにショートカットを確率  $p$  で加えた場合の  $P(t)$  を計算した。このネットワークは small-world 効果を示す。べき乗側が成り立つ時間領域から指数関数則によって有限の漸近値  $P(\infty)$  に近づく領域へのクロスオーバーがある。べき乗側が成り立つ領域では、 $\theta$  は系を特徴づけるただ一つの長さ  $\xi = 1/kp$  によってスケールされ (5)、その振る舞いは系のサイズ  $N$  には依存しない。 $kp$  が 1 に比べて十分小さい領域における  $\theta$  のスケール関数は

(6) によって近似できる。一方、漸近領域においては、そのダイナミクスは系のサイズ  $N$  に依存する。

(3) と (5) をまとめると、べき乗側が成り立つ領域における persistence 指数  $\theta$  は次のスケーリング形で近似できることができる：

$$\theta(k, p) = \theta(1, 0) k^{-\beta} f(kp) \quad (7)$$

この表式は、臨界現象との類似性を示唆している。その物理的根拠は明らかでないが臨界現象の研究で開発された手法（繰り込み群，レプリカ法…）などは、この問題でも有効であることが期待される。

理論的研究に加えて、より広範なシミュレーションによる定量的な研究が望まれる。

## 参考文献

- (1) D. J. Watts, *Small-World*, Princeton University Press (Princeton), 1999.
- (2) S. Milgram, *Psychology Today*, 2, 60 (1967).
- (3) C. Korte and S. Milgram, *Journal of Personality and Social Psychology*, 15,101 (1970).
- (4) T. Remes, Six Degrees of Rogers Hornsby, *New York Times*, August 17,1997.
- (5) M. Gladwell, Six degrees of Lois Weisberg, *The New Yorker* 74,52 1998.
- (6) D. Kirby and P. Sahre, Six degrees of Monica, *New York Times*, February 21,1998.
- (7) U. Alon, M. G. Surette, N. Baskai and S. Leibler, *Nature* 397,168 (1999).
- (8) S. L. Pimm, J. M. Lawton and J. E. Cohen, *Nature* 350,669 (1991).
- (9) R. T. Paine, *Nature* 355,73 (1992).
- (10) K. McCann, A. Hasings and G. R. Huxel, *Nature* 395,794 (1998).
- (11) L. A. Amaral, A. Scala, H. Berthelemy and H. E. Stanley, cond-mat/0001458.
- (12) P. O. Seglen, *J. Am. Soc. Inf. Sci.* 43,628 (1992).
- (13) S. Redner, *Eur. Phys. J.* 4,131 (1998).
- (14) R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barabasi, *Nature* 401,130 (1999).
- (15) M. E. J. Newman, cond-mat/0001118.
- (16) D. J. Watts and S. M. Strogatz, *Nature* 393,440 (1998).
- (17) M. Barthelemy and L. A. N. Amaral, *Phy. Rev. Lett.* 82,3180 (1999) ; Erratum, cond-mat/9906247.

- (18) A. Barret, cond-mat/9903323.
- (19) R. Nonasson, cond-mat/9903347.
- (20) M. E. J. Newman and D. J. Watts, Phys. Lett. A263,341 (1999).
- (21) A. Barrat and M. Weigt, Europ. Phys. J. B13,547 (2000).
- (22) M. A. de Mondezes, C. Moukarzel and T. J. P Penna, cond-mat/9903426.
- (23) R. Kasturirangan, cond-mat/9904055.
- (24) M. E. J. Newman and D. J. Watts, Phys. Rev. E60,7332 (1999).
- (25) R. V. Kulkarni, E. Alamaas and D. Stroud, cond-mat/9905066.
- (26) C. F. Moukarzel and M. A. de Mendezes, cond-mat/9905131.
- (27) C. F. Moukarzel, cond-mat/9905322.
- (28) S. N. Dorogovstsev and J. F. F. Mendes, cond-mat/9907445.
- (29) R. V. Kulkarni, E. Almaas and D. Stroud, cond-mat/9908216.
- (30) M. E. J. Newman, C. Moore and D. J. Watts, cond-mat/9909165.
- (31) L. F. L-Fernandez, R. Huerta, F. Corbancho and J. A. Siguenza, cond-mat/9909379.
- (32) C. Moore and M. E. J. Newman, cond-mat/9911492.
- (33) C. Moore and M. E. J. Newman, cond-mat/0001393.
- (34) N. Mathias and V. Gopal, con-mat/0002076.
- (35) B. Bollobas, *Random Graph*, Academic Press (New York) 1985.
- (36) M. Gendran and M. Minoux, *Graphs and Algorithms*, (Wiley and sons, city, 1984).
- (37) E. Ben-Naim L, Frachebourg and P. L. Krapivsky, Phys. Rev. 53,3078 (1996).
- (38) 今枝辰博, 経営研究第 13 卷第 1 号, 41 (1999).
- (39) A. J. Bray, B. Derrida and C. Godreche, Europhys. Lett. 27,175 (1994).
- (40) B. Derrida, A. J. Bray and C. Godreche, J. Phys. A27, L357 (1994).
- (41) B. Derrida, J. Phys. A28,1481 (1995).
- (42) D. Stauffer, J. Phys. A27,5029, (1994).
- (43) B. Derrida, P. M. C. de Oliveira and D. Stauffer, Physica 224A, 604 (1996).
- (44) S. Jain, cond-mat/9906272.
- (45) H. E. Stanley, *Introduction to Phase transisions and critical phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1971).