

2次元カオス CML の相秩序化

今 枝 辰 博

キーワード

- ・創発 (emergence)
- ・カオス写像 (chaotic map)
- ・カップルド・マップ・ラティス (coupled map lattice)
- ・相秩序化 (phase ordering)
- ・ユニバーサリティ (universality)
- ・動的スケーリング則 (dynamic scaling law)

1. はじめに

複雑系を理解するための重要な概念のひとつに「創発 (emergence)」がある¹⁾。創発とは、多くの要素から構成される系において、要素同士の局所的な (local) 相互作用から大局的な (global) 性質が、自発的にたちあられることをさす。数学、物理学、生物学、生態学、社会学、経済学などにおいて、この振る舞いの起源を探ろうとする研究が数多くなされている²⁾。

創発を一般的な現象としてとらえようとするならば、特殊な条件を課した系の研究からは、得るものが少ないだろう。また創発が起こるメカニズムは、系の外部からの攪乱に対して頑強 (robust) でなければならない。したがっ

て、創発の起源を探るためには、局所的な性質として最小限 (minimal) なものを仮定したモデルを構成し、そこからより普遍的な (universal) 大局的性質を導くことが有効である。さまざまなモデルにおいて共通な普遍的な振る舞いを見出すことができれば、そこから創発の起源についての知見が得られるであろう。

そのような研究において広く用いられているモデルとして、カップルド・マップ・ラティス (Coupled Map Lattice : CML) がある³⁾。CML とは、連続状態を持つ力学系を離散時間、離散空間上で定義し、空間的に結合したものである。このモデルは、Kaneko によって考案され、空間が 1 次元の場合を中心にして、時空カオスの研究に用いられてきた⁴⁾。コンピュータの使用が本質的な役割を果たす研究の代表的な例としてもよく知られている。

本論文では、カオス写像を結合した 2 次元 CML についてコンピュータシミュレーションを行い、その大局的な振る舞いの普遍性について論ずる。

最近 Chaté は 2 次元以上の CML において、示量性カオス⁵⁾の (extensively chaotic) 状態で、「自明でない集団的振る舞い (NonTrivial Collective Behavior : NTCB)」が現れることを論じた⁶⁾。実際に Lemaître と Chaté は、対称なバンドカオスを示す写像を拡散的に結合したモデルにおいて、空間上に相秩序化 (phase ordering) が起こることをシミュレーションによって見出した⁷⁾。すなわち、写像間の結合により、2 つあるバンドのうちの 1 つのバンド上でカオス的になる写像が空間上で集団を形成するようになる (詳しくは、本論文 2.1, 2.2 を参照)。この集団のサイズは、時間とともに、セミマクロな長さまで成長し、ついには系全体をひとつの集団が占めるようになる。

このようなダイナミクスは、物理学で、長距離秩序 (long range order) の発展の問題として多くの研究がなされている⁸⁾。そして、その代表的な例である Ising モデルを中心として、ダイナミクスをいくつかの普遍クラス (universality class) に分類できることが示されている。

Ising モデルでは、離散空間内の格子点上で定義された変数 σ が +1, -1 の 2 つの値のみを取る。無限温度の状態から“急冷”された系では、 σ が +1 ま

たは -1 である秩序化された空間領域は、時間 t とともにミクロなスケールからマクロなスケールまで成長し、その成長パターンは自己相似性を持つ。そのとき、その領域のサイズは、ただ1つの長さ $R(t)$ によって特徴づけられ、べき乗則 $R \sim t^\alpha$ がなりたつ。したがって $R(t)$ が格子間隔などのミクロな長さより充分大きくなると、系のミクロな性質は大局的な振る舞いに影響しなくなる。その結果、大局的振る舞いについての普遍性が生じる。また、その普遍クラスは、べき乗則の指数 α によって特徴づけられる。実際 Ising モデルの場合は、系全体についての σ の和が時間の変化について一定に保たれないときには、 $\alpha = 1/2$ 、保たれるときには、 $\alpha = 1/3$ であることがわかっている。その値はともに、空間の次元にもよらない。

Lemaître と Chaté による CML の相秩序化においても、べき乗則 $R \sim t^\alpha$ にしたがう長さ $R(t)$ がただ一つ存在する。ところが、彼らは、 α の値が写像の結合定数 g に依存することを見出した。 g は連続値をとるから、その値によって普遍クラスを特徴づけることはできない。

本論文では、この2次元CMLの普遍クラスについて論じる。まず、persistence 確率分布関数に対して、動的スケーリング則 (dynamic scaling law) が成り立つことをコンピュータシミュレーションによって見出す。そして、そのスケーリング関数は g に依存しないようにみえる。したがって、このCMLの普遍クラスは、指数 α の値でなく、スケーリング関数の形によって論ずることができる。また Ising モデルに対して同じ動的スケーリング則を見出す事ができる。これらのスケーリング関数の形から、CML と Ising モデルが“弱い”普遍性によって結び付けられることを論ずる。最後に、いくつかの他のモデルについて同様な計算を行い、別の普遍クラスが存在することを述べ、その起源について論ずる。

2. Chaotic Coupled Map Lattice

d 次元格子空間と離散時間 t 上で定義された力学系

$$x_r(t+1) = F_{\mu_1, \mu_2, \dots}(x_r(t), r' \in L(r)) \quad (1)$$

を考える。ここで、 $x_r(t)$ は連続値をとる変数で、各格子点 r 上で定義されている。 μ_1, μ_2, \dots は、系のパラメータ、 $L(r)$ は r の最近接格子点から成る集合とする。

Chaté は、系が示量性カオスの状態にあるときに発生する集団運動について次の3つの可能性を考えた⁹⁾。一つは、個々の写像の振る舞いと大局的な振る舞いが同期して振動する場合である。この運動については、これまで多くの研究があるが、明らかに創発とはみなせない。二つ目は、臨界ゆらぎによる長距離秩序の発生である。この運動は、物理学で臨界現象としてよく知られている⁹⁾。しかし、このゆらぎが生じるためには、系のパラメータを調節して系を臨界点に保たなければならない。したがって、この運動も創発とは考えられない。Chaté はこれら2つの可能性を除いたうえで、局所カオスから自発的に生まれるマクロな運動を、自明でない集団的振る舞い (NTCB) と名づけ、創発のモデルとして提案した。

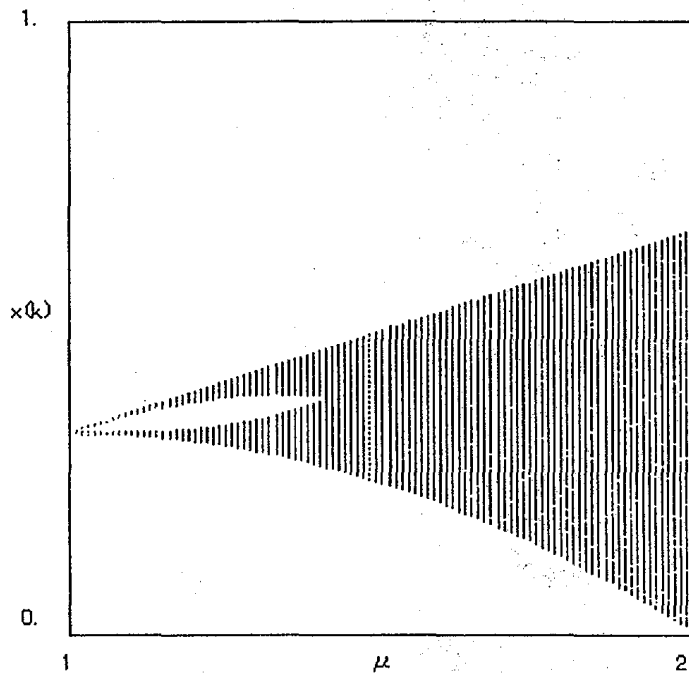
この節では、Lemaître と Chaté のモデルを中心として、NTCB とその特徴について述べる⁹⁾。

2.1 Lemaître – Chaté のモデル

次の写像 $f_\mu(x)$ を考える。

$$f_\mu(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\mu - \mu x & -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ \mu x & -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\mu - \mu x & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$\mu = 3$ のときは、Miller と Huse によるカオス写像である¹⁰⁾。 $x_{k+1} = f_\mu(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) の分岐図を図1に示す。この図は、 $x_0 = 0.3$ として得たものである。(2) の対称性から明らかなように、 $x_0 < 0$ では、この図と x 軸について対


図 1：写像 $f_\mu(x)$, (2) の分岐図

称な分岐図が得られる。特に $\mu = 1.9$ のとき、写像 (2) は、有限のギャップで隔てられた 2 つの対称な普遍領域、 $I_\pm = [\pm\mu(2 - \mu)/3, \pm\mu/3]$ をもつ。したがってこのモデルでは、“スピン変数” $\sigma = \text{sign}(x)$ を定義することができる。ここで、 $\text{sign}(x)$ は、 x の符号をとることを表わす。

2. 2 Coupled Map Lattice

Lemaître と Chaté は (2) の写像を 2 次元格子上で拡散的に結合させた CML を考えた⁷⁾。

$$\begin{aligned}
 x_{i,j}(t+1) = & f_\mu(x_{i,j}(t)) - 4gf_\mu(x_{i,j}(t)) \\
 & + g\{f_\mu(x_{i+1,j}(t)) + f_\mu(x_{i-1,j}(t)) + f_\mu(x_{i,j+1}(t)) + f_\mu(x_{i,j-1}(t))\} \\
 & 1 \leq i, j \leq N
 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 g は結合定数、 N は系のサイズである。また周期的境界条件をとる。彼らは、(3) を $N = 2048$ の格子についてシミュレートして NTCB を見出した。

彼らは、初期条件を次のように与えた：格子点の半分をランダムに選び次々

に I_+ に属する異なる実数をその格子点における変数に与える。そして、それらの値の符号を変えたものを格子点の残りの半分にランダムに与える。したがって、初期時刻において変数 x の全格子点での和は 0 である。図 2 に、いくつかの格子点における $x_{ij}(t)$ の時間変化を示す。 I_+ (または I_-) のなかでカオス運動をする変数は、予測できない“ランダムな”時刻にその属する領域を変えているのがわかる。すなわち $\sigma = \pm 1$ はランダムな時刻にその値を変える。

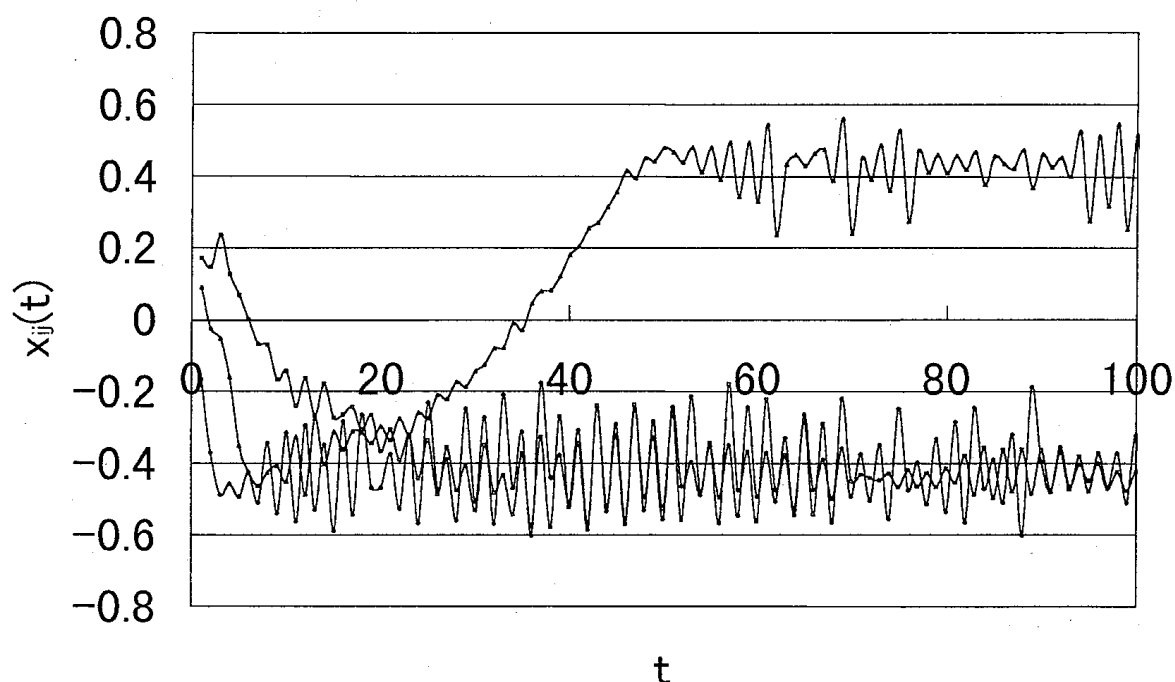


図 2：格子点 $(N/4, N/4)$, $(N/2, N/2)$, $(3N/4, 3N/4)$ での $x_{ij}(t)$ の時間変化

2. 3 Ising モデル

以下の議論のためにこの節では、Ising モデルのダイナミクスについて述べる。このモデルは、強磁性体のモデルとして、よく知られている⁸⁾。

Ising モデルでは、1 で述べたように、格子点上で定義された“スピン変数” σ が +1 か -1 かの値をとる。ここでは、簡単のために離散時間を考える。このとき系のエネルギー E は、結合エネルギーを J として

$$E = -\sum J \sigma_i \sigma_j \quad (4)$$

によって与えられる。 σ のすべての格子点についての和 $M = \sum \sigma$ を秩序変数という。この秩序変数が時間の変化に対して一定に保たれないときには、次の

ようにしてダイナミクスを導入する。各時刻において格子点をランダムに選び、その点での σ の値を変えるか変えないかをボルツマン因子 $\exp(-\Delta E/T)$ と乱数を比較して決める。ここで ΔE は、 σ の値を変えたときと変えなかったときのエネルギーの差である¹¹⁾。また、 T は絶対温度である。 $t < 0$ で無限温度にあった系を $t = 0$ で $T < T_c$ (T_c : 臨界温度) に急冷 (quench) すると、系に秩序化が起こることが知られている。

2. 4 NonTrivial Collective Behavior

Lemaître と Chaté は、CML (3) をシミュレートして、 g の値が大きいときに、完全相秩序化 (perfect phase ordering) が起きることを見出した。すなわち、 $\sigma = 1$ (または、 $\sigma = -1$) である写像が集まった空間領域が形成され、その領域は時間とともに広がって、最終的には、系全体を占める。その様子を図 3 (a), (b) に示した。図 4 (a), (b) には、Ising モデルでの空間秩序の発展を示した。明らかに、これらの空間パターンの間には、類似性がある。一方、 g が小さいときには、図 5 (a), (b) に示したように、 $\sigma = 1$ の領域と、 $\sigma = -1$ の領域とが競合し、その界面はピン止め (pinning) される。Lemaître らは、 σ の値がそろった空間領域の特徴的な長さ $R_L(t)$ と persistence 確率 $p_0(t)$ の時間発展の違いによって上述の 2 つの相を区別しようとした。ここで、 $R_L(t)$ は、2 点相関関数

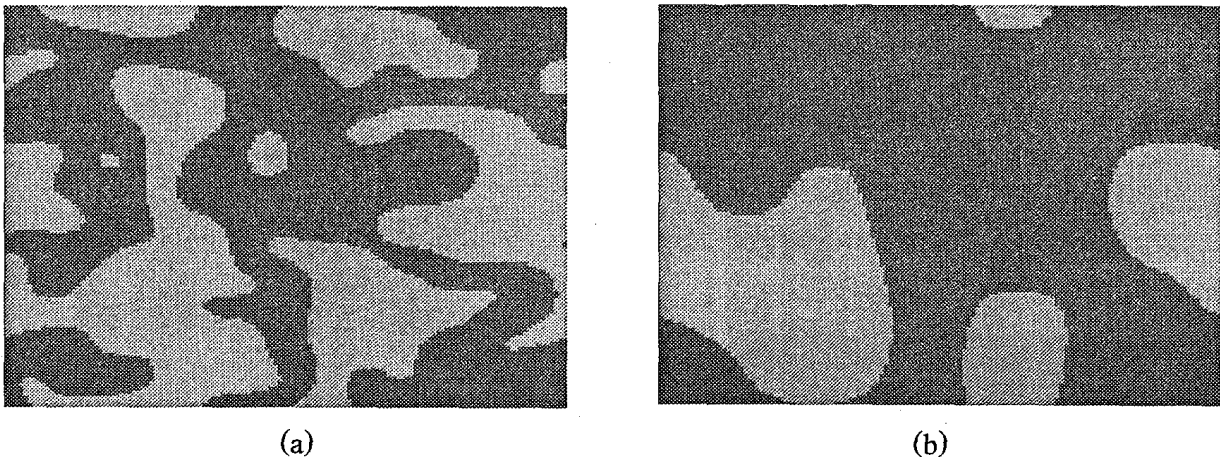


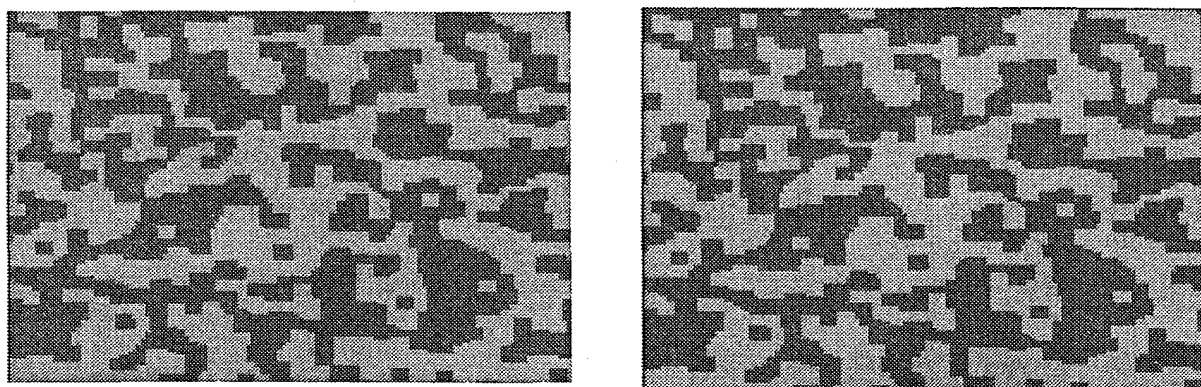
図 3: CML における、空間パターンの時間発展 $g = 2.0$, $\mu = 1.9$, (a), (b): $t = 100, 1000$



(a)

(b)

図4：Ising モデルにおける，空間パターンの時間発展 $T = 0$ ，(a)，(b)： $t = 60, 200$



(a)

(b)

図5：CML における，空間パターンの時間発展
 $g = 1.5$ ， $\mu = 1.9$ ，(a)，(b)： $t = 1000, 2000$

$$C(r, t) = \sum_{r'} \langle \sigma_r(t) \sigma_{r+r'}(t) \rangle \quad (5)$$

をベクトル r の方向について平均した関数 $\bar{C}(r, t) = \sum_{r=|r|} C(r, t) / \sum_{r=|r|} 1$ から， $\bar{C}(R_L(t), t) = 1/2$ という条件によって定義する。 $\langle \dots \rangle$ は，異なる初期条件についての平均を取ることを表わす。 $p_0(t)$ は $t = 0$ から時刻 t まで一度も $\sigma(t)$ の符号を変えていない写像の割合である¹²⁾。

Lemaître らは， $N = 2048$ の格子についての1回の試行から， $R_L(t)$ と $p_0(t)$ の時間発展を調べた。本論文では， $N = 128$ の格子について200回の試行を行ない，それらについての平均から種々の量を計算する。また，計算量を節約するために，特徴的な長さを表わす量として， $R_L(t)$ の代わりに，

$$R(t) = N \langle M^2(t) \rangle \quad (6)$$

をとる¹³⁾。図 6, 7 にその結果を示す。 $g > g_c$ に対しては、べき乗則

$$R(t) \sim t^a \quad (7)$$

$$P_0(t) \sim t^\theta \quad (8)$$

が良く成り立っており、Lemaître らの結果を再現している (図 6, 7)。一方 $g < g_c$ に対しては、空間パターンが“凍結”するために $R(t)$, $p_0(t)$ は時間が経つにしたがって、有限の値に飽和することが分かる。この振る舞いの違いから、Lemaître ら $g_c \sim 1.6$ と見積もった。

$R(t)$ についての、べき乗則は空間パターンの時間発展が自己相似性を持つことを示唆している (図 3, 4 を参照)。しかし、CML では、指数 a , θ がともに結合定数 g に依存している。Ising モデルなどのこれまで物理学で研究されてきた系では、ごく特殊な例を除いて、このように指数がミクロな量によることはない。したがって、CML の普遍クラスを特徴づけるためには、 a の値以外のものを見出さなければならない。

図 2 (a), (b) に示した秩序化の空間パターンは、Ising モデルについてのパターン図 2 (c), (d) と同様に自己相似性を示している。(6), (7) のべき

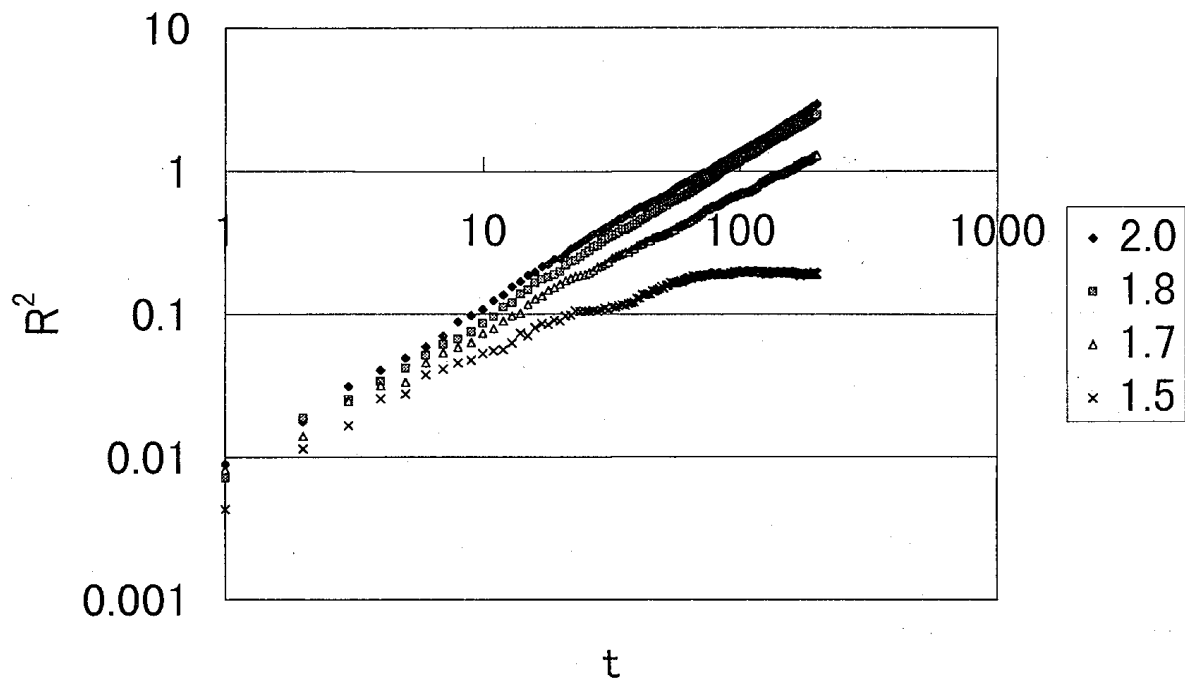


図 6 : $R(t)$ の時間変化 : $g = 2.0, 1.8, 1.7, 1.5$

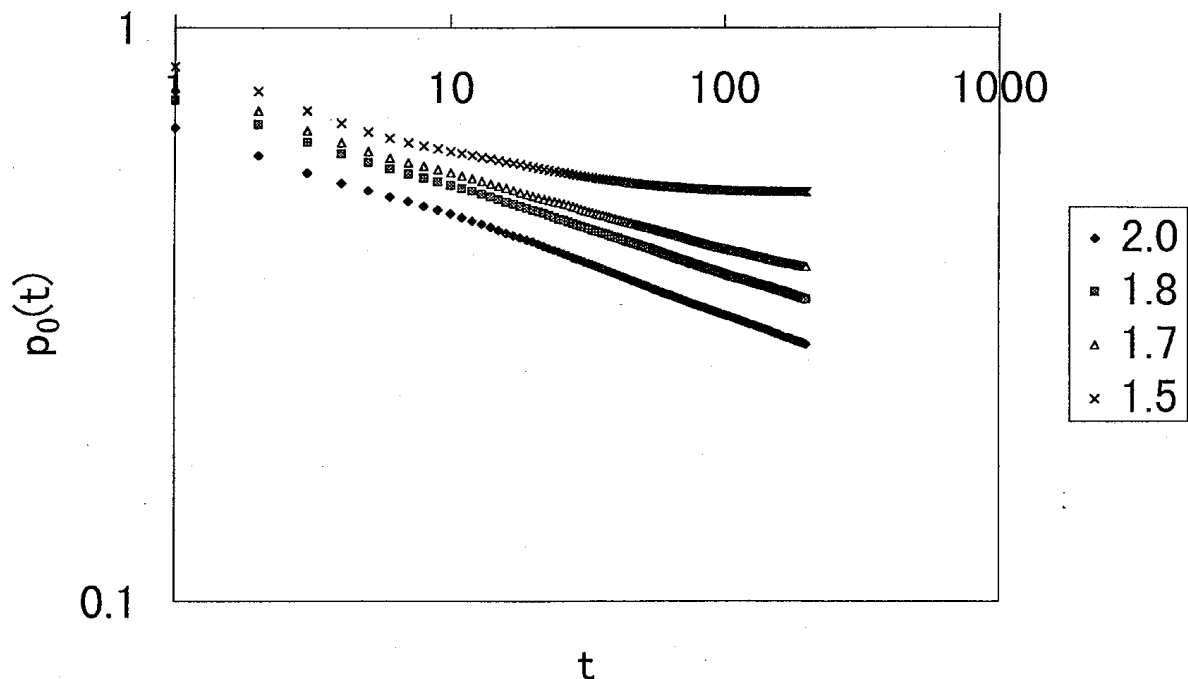


図 7 : $p_0(t)$ の時間変化 : $g = 2.0, 1.8, 1.7, 1.5$

乗則は、その現われである。しかし、指数 a の値が、ミクロなパラメータ g に依存するために、CML の普遍クラスを a の値によって特徴づけることはできない。

3. NTCB における普遍性

この節では、CML (3) について persistence 確率分布関数 $p_n(t)$ が動的スケーリング則にしたがうことを述べる。また、そのスケーリング関数の形が g はよらない。さらに Ising モデルに対しても同様の動的スケーリング則が成り立つことを述べ、これらのモデルが“弱い”普遍性によって、結びついていることを示唆する。

3. 1 persistence 確率分布関数

系全体の写像のうちで、時刻 0 から t までの間に、 $a_i(t)$ が n 回その符号を変えた写像の割合を $p_n(t)$ で表わす。図 8 に $t = 200, 400, 600, 800$ における

2次元カオス CML の相秩序化

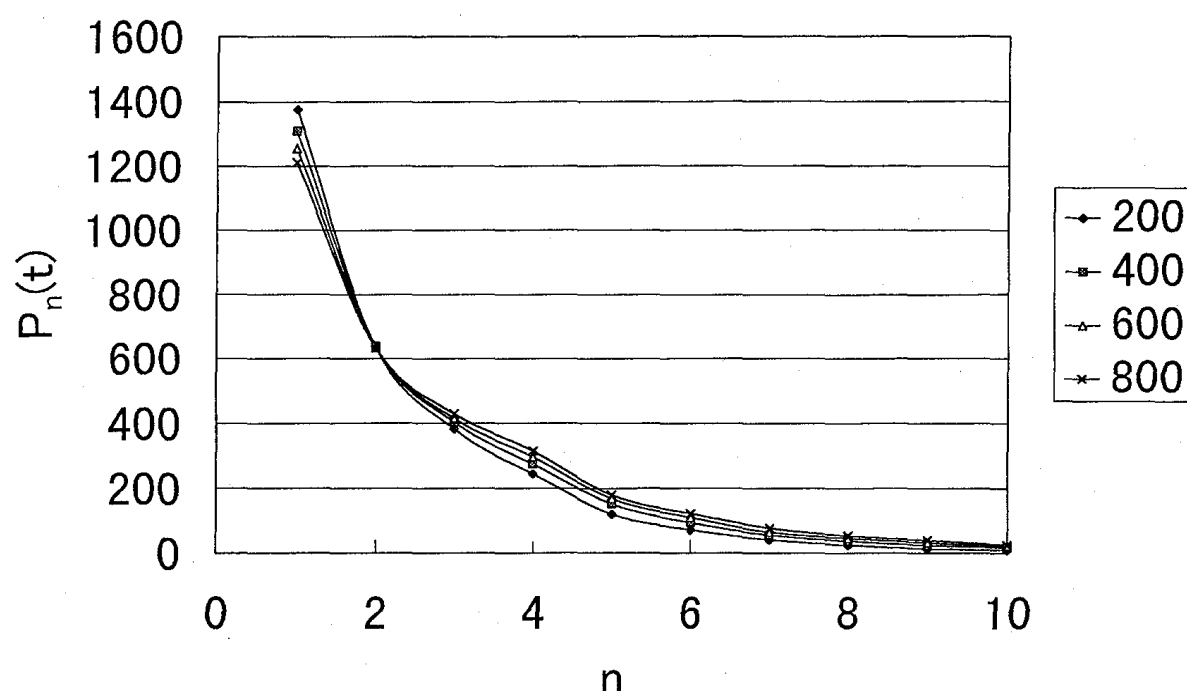


図 8 : $p_n(t)$ の時間変化 : $g = 2.0$, $t = 200, 400, 600, 800$

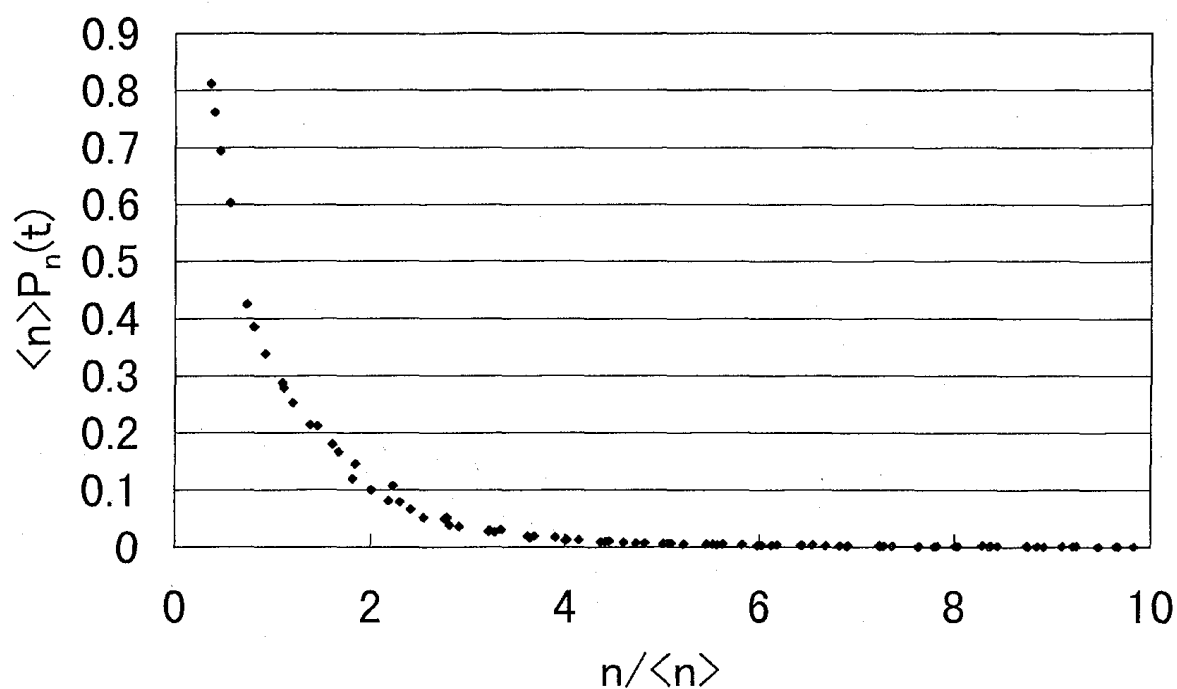


図 9 : $\langle n \rangle$ の時間変化 $t : g = 2.0, 1.8, 1.7, 1.5$

その値を示す。 $g = 2.0 > g_c$ のときは、完全相秩序化に向かって分布の形が徐々に平坦になり、 n の平均値 $\langle n \rangle = \sum n p_n(t)$ は、時間とともに増大する。図 9 に $\langle n \rangle$ の時間変化をプロットした。 $\langle n \rangle$ は時間について単純なべき

乗則にはしたがわない。

3. 2 動的スケーリング則

$p_n(t)$ の分布が、 $\langle n \rangle \langle \sqrt{(n - \langle n \rangle)^2} \rangle$ によって決まるとして、次のようなスケーリング形を仮定する¹⁴⁾。

$$p_n(t) = \frac{1}{\langle n \rangle} f(n/\langle n \rangle) \quad (9)$$

図 10 に、 $\mu = 1.9$, $g = 2.0$ のときのスケーリングプロットを示す。明らかに、異なる時刻における値が一つの曲線にのることが分かる。すなわち、CML (3) の NTCB では、 $p_n(t)$ について動的スケーリング則が成り立つ。驚くべき事に、図 11 に示すように、このスケーリング関数の形は、 g の値によらない。

Ising モデルの秩序化について同様の解析を行う。図 12 に $T = 0$ に急冷した場合の、 $R(t)$, $p_0(t)$, $\langle n \rangle$ の時間発展を示す。 a , θ については、これまでに知られている値 $a = 1/2$ ⁸⁾, $\theta = 0.17 \dots$ ¹²⁾ が得られる。これらの値は、急冷した温度によらないことが示されている。 $\langle n \rangle$ については、比較する研究が

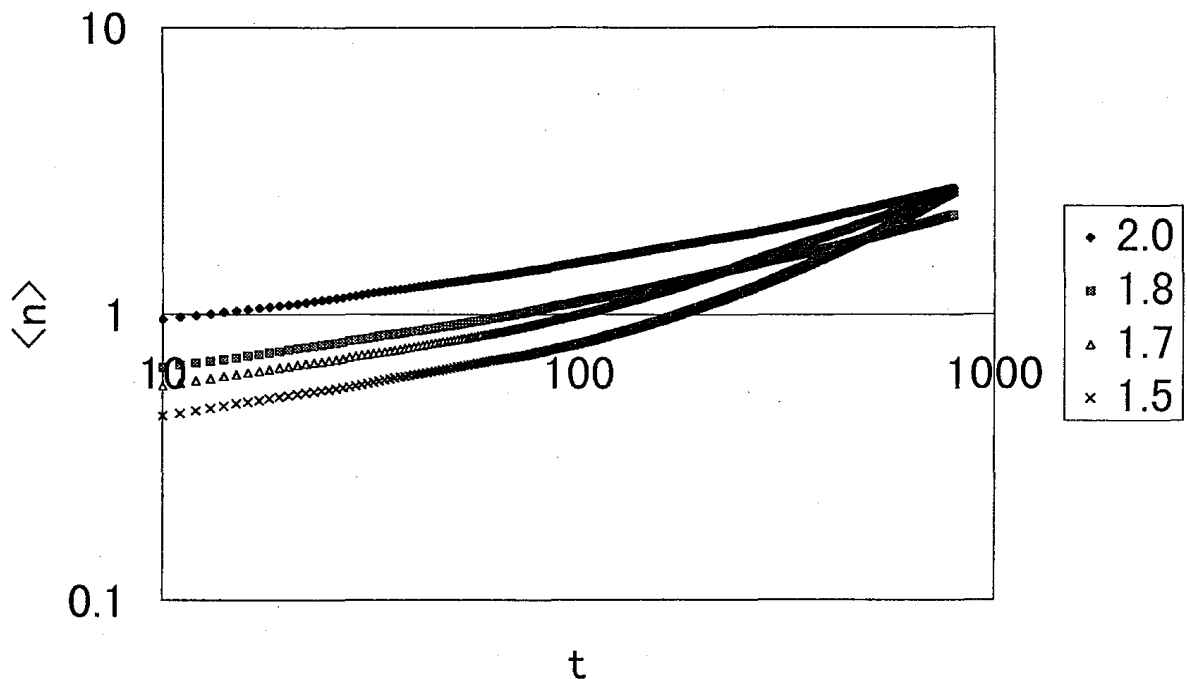


図 10：スケーリングプロット $t = 200, 400, 600, 800$ における値がプロットしてある

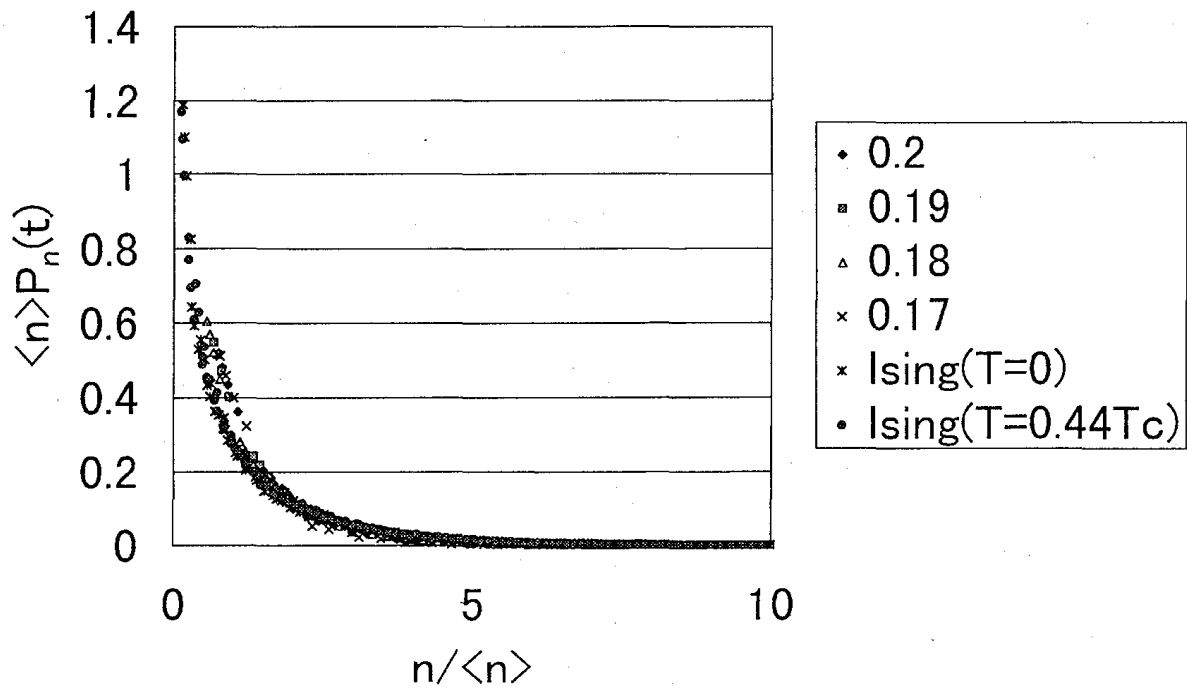


図 11：異なる g についてのスケーリングプロット $g = 2.0, 1.8, 1.7, 1.5$
 また、後に述べる Ising モデルの $T = 0$ と $T = 0.44T_c$ に対するスケーリングプロット
 もあわせて示してある。

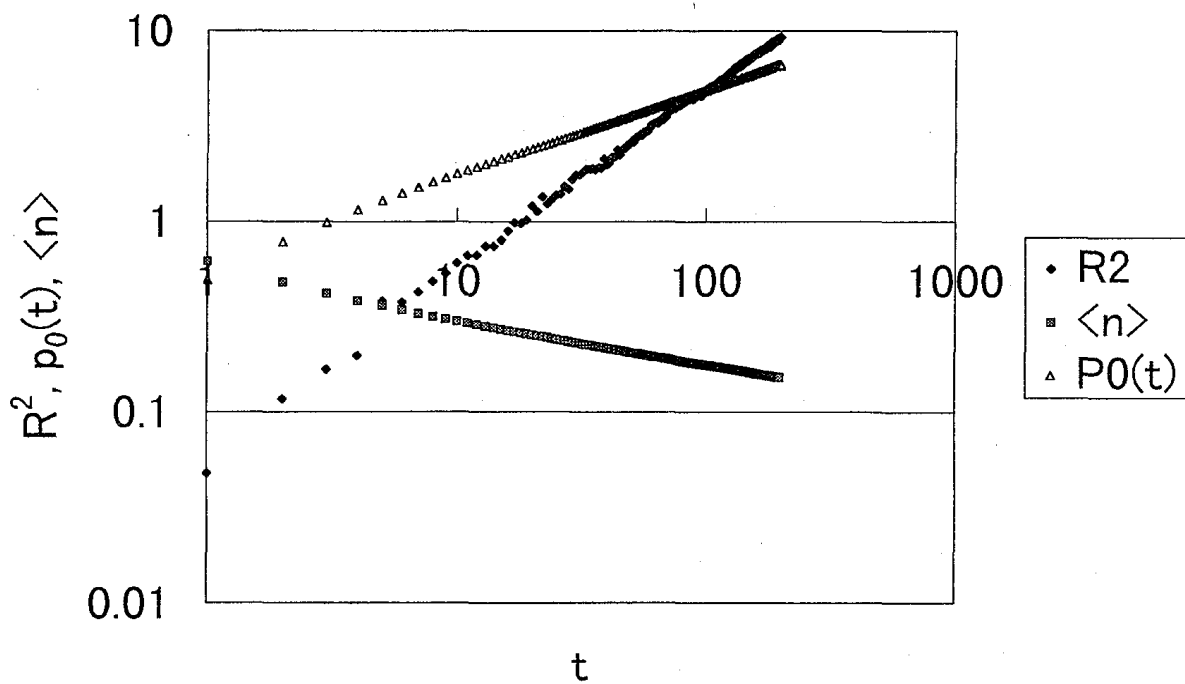


図 12：Ising モデルにおける $R(t)$, $p_0(t)$, $\langle n \rangle$ の時間発展

ない。図 11 に (9) によるスケーリングプロットの結果を示す。CML の場合と同様に、異なる時刻における値が一つの曲線に収束することが分かる。また、 $T = 0.44T_c$ に急冷した場合のスケーリングプロットもあわせて示す。スケーリング関数は、重なっている。図 8 には、図 10 のスケーリング曲線が CML のものとあわせてプロットしてある。CML と Ising モデルのスケーリング曲線は、完全には重なっていないが定性的に共通の性質をもっている。この“弱い (weak)” 普遍性によって、CML (3) と Ising モデルとをひとつの普遍クラスとしてとらえることを提案する。

3. 3 2 点相関関数

物理学では、Ising モデルなどの普遍性について議論するときに、2 点相関関数 $\bar{C}(r, t)$ 、または、そのフーリエ変換である構造関数が用いられてきた⁸⁾。構造関数は光散乱等の実験で直接測定できるために重要である。しかし本論文であつかっている CML は直接対応する自然現象がないために、 $p_n(t)$ という抽象的な量を用いて議論した。

ここでは、CML の 2 点相関関数について述べる。期待される動的スケーリング則は、

$$\bar{C}(r, t) = G(r/R(t)) \quad (10)$$

によって表わされる。スケーリングプロットの結果を図 13 に示す。 $x = r/R(t) < 1$ では、明らかに、異なる時刻での値が一つの曲線上にある。また、そのスケーリング曲線の形は、 g の値によらない。 x が小さいところでは、

$$G(x) \approx 1 - cx \quad (11)$$

によって表わされることが分かる。これは、界面が鋭いことによるもので、Porod 則とよばれる。Ising などではよく知られている。ここで比例定数 c は領域 (domain) の密度を表わす。

x が 1 に近づくと系が有限であることによって、シミュレーションで得られたデータが散乱して、一つの曲線に収束しない。一方、図 11 にみるように $p_n(t)$ についてのプロットは、有限サイズであることの影響を大きく受けない。

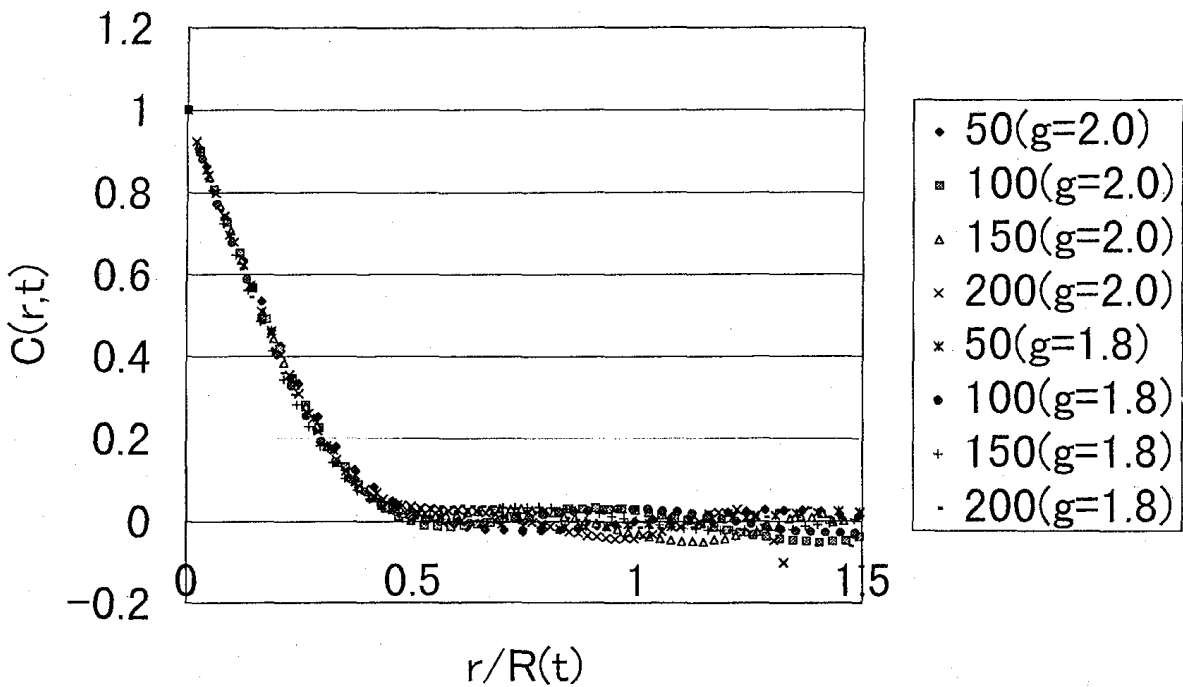


図 13: $\bar{C}(r, t)$ と $r/R(t)$ のスケーリングプロット $g = 2.0, 1.8$ の場合に対して、それぞれ、 $t = 50, 100, 150, 200$ の場合での値をプロットしてある。

したがって、本論文では、 $p_n(t)$ を用いて、CML の普遍性を論じた。また、 $p_n(t)$ の計算は $\bar{C}(r, t)$ に比べて計算量が少なくてすむ。これらのことから、スケーリングを論じるときには、 $p_n(t)$ は有用である。

3. 4 異なる普遍クラスに属するモデル

この節では、3. 2 で述べた普遍クラスに属さない例をあげる。

(1) cubic map

CML の研究でよくとりあげられる次の cubic map を考える³⁾。

$$x_{i,j}(t+1) = \mu x_{i,j}(t)(1-x_{i,j}(t)) + g\{x_{i+1,j}(t) + x_{i-1,j}(t) + x_{i,j+1}(t) + x_{i,j-1}(t)\} \quad (12)$$

ここでは、 $\mu = 1.3$ として、 $g = 0$ のとき 2 周期運動をしている写像を考える。 $g = 0.15$ としてこれらの写像を結合させる。また 2 値関数として、 $\sigma_{i,j}(t) = \text{sign}(x - \bar{x})$ を定義する。ここで、 $\bar{x} = (x(t+1) + x(t))/2$ である。図 14 に空間パターンの時間発展、図 15 に $R, p_0, \langle n \rangle$ の時間変化を示す。図 16 に $p_n(t)$ のスケーリングプロットを示す。動的スケーリング則は成り立っているが、スケー

リング関数の関数形は、図 11 のものと異なる。したがって、2つのモデルは、異なる普遍クラスに属していることが分かる。

(2) 投票者モデル

1次元では、投票者モデルのダイナミクスは、Ising モデルの $T = 0$ のダイナミクスと同等であることが分かっている。一方、2次元では、それらは異

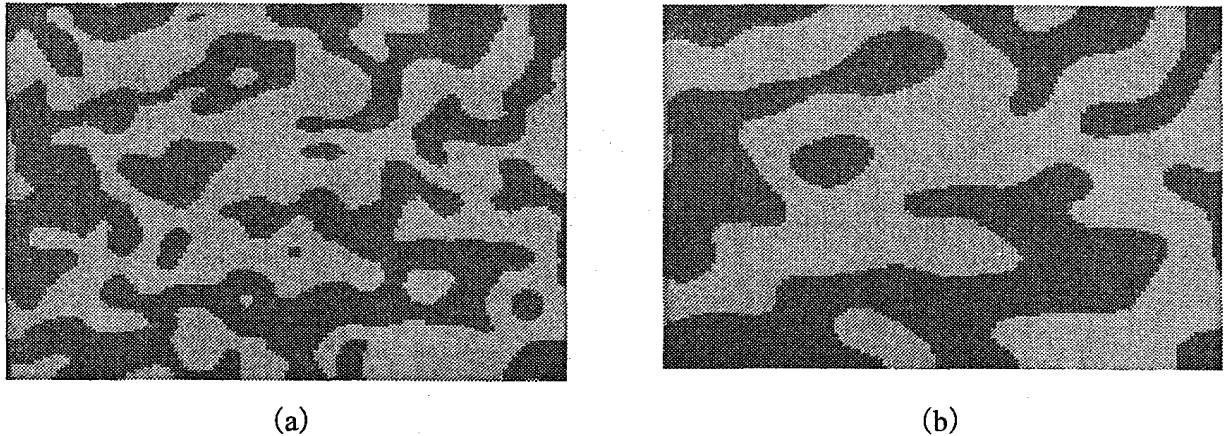


図 14 : cubic map, (12) における空間パターンの時間発展 : a) $t = 50$, b) $t = 100$

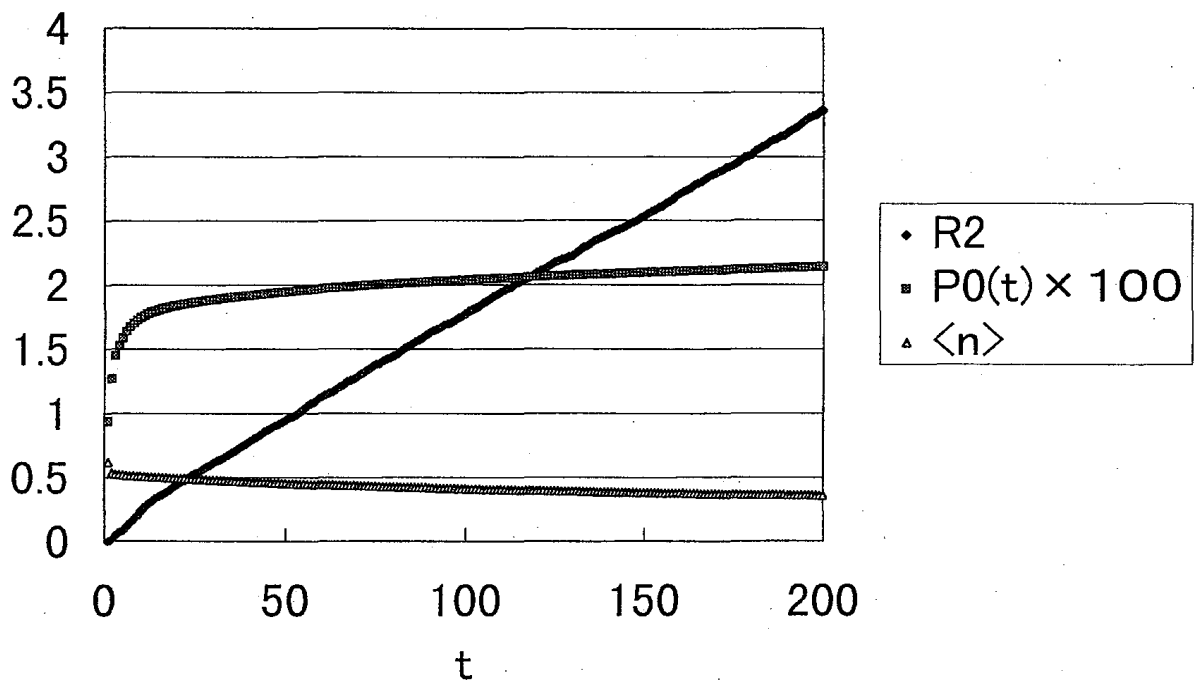


図 15 : cubic map, (12) における $R(t)$, $p_0(t)$, $\langle n \rangle$ の時間発展

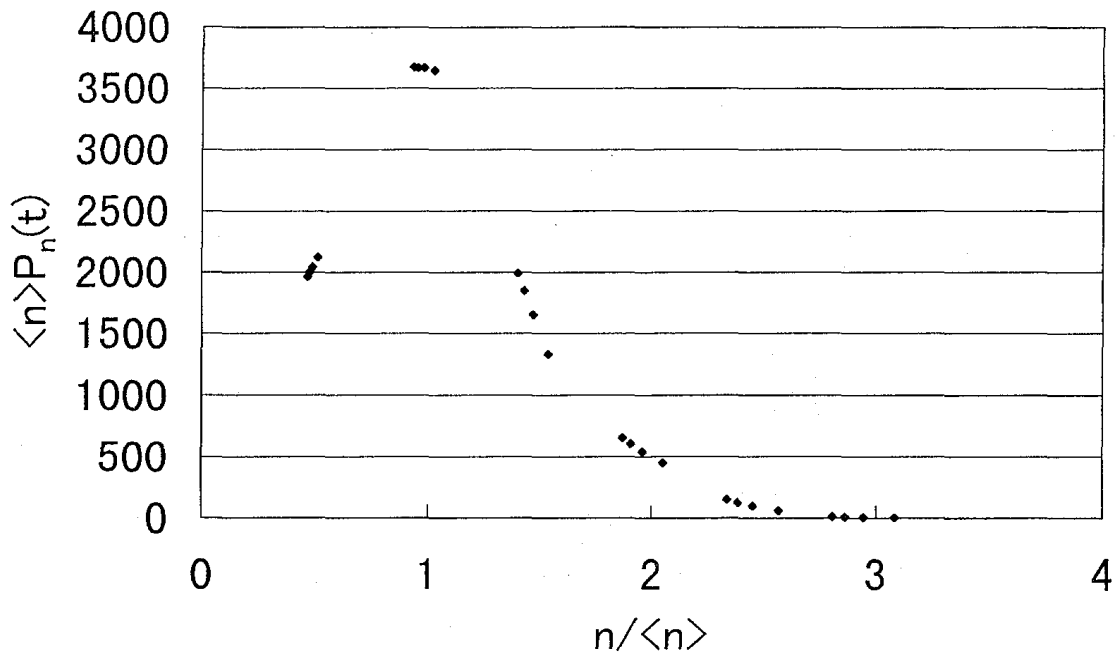
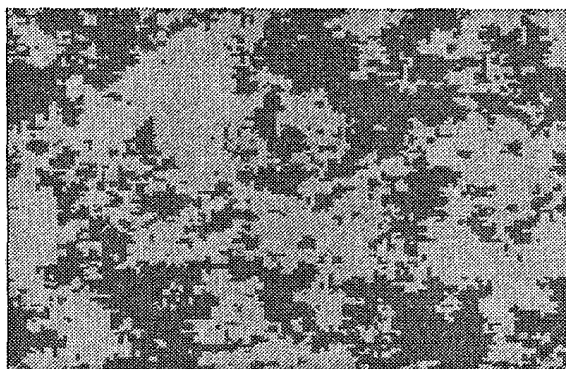
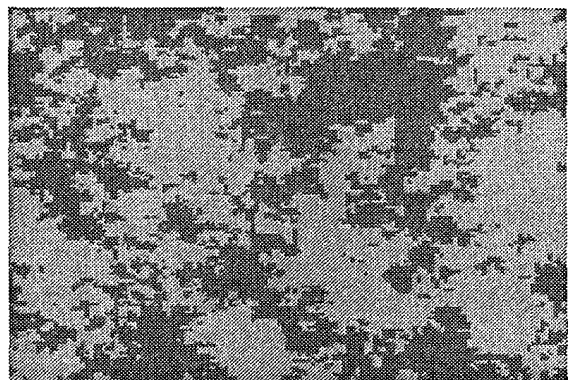


図 16 : cubic map, (12) における $p_n(t)$ のスケーリングプロット

なる。図 17 に空間パターンの時間発展を示す。明らかに、ここまで論じてきたモデルとは異なり、自己相似性をもたない。実際、図 18 に示すように、 R , p_0 , $\langle n \rangle$ の時間変化はべき乗則にしたがっていない。図 19 に $p_n(t)$ のスケーリングプロットを示す。当然であるが、動的スケーリング則は成り立っていない。



(a)



(b)

図 17 : 投票者モデルにおける空間パターンの時間発展 : a) $t = 50$, b) $t = 100$

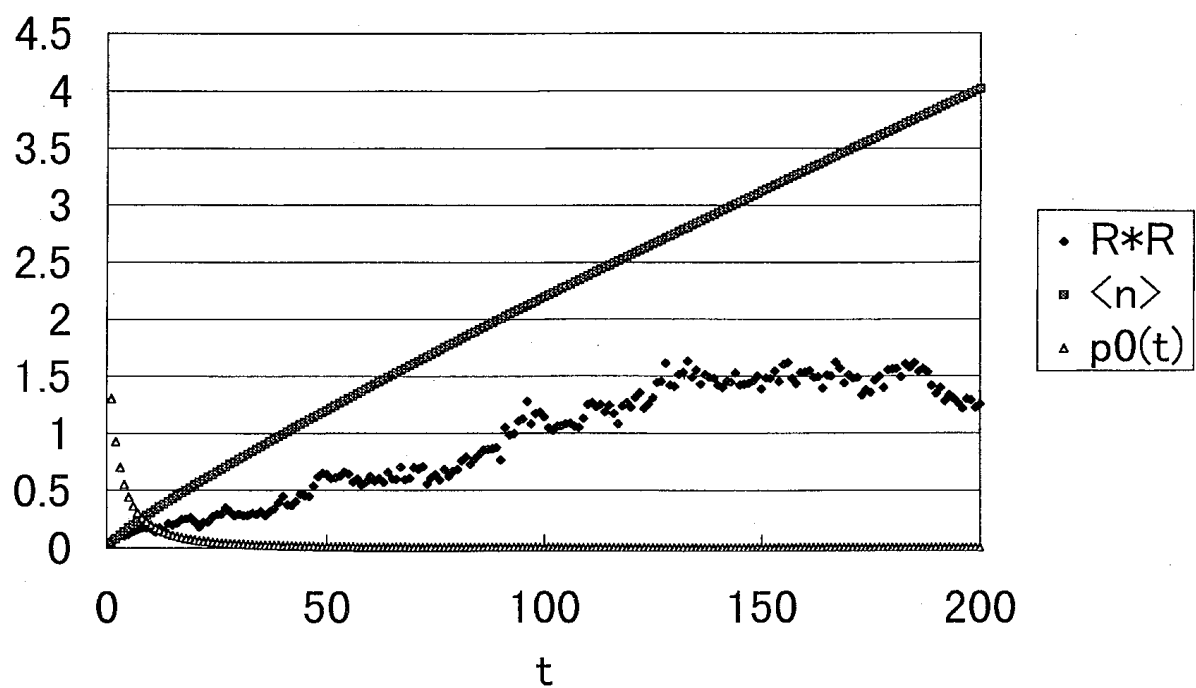


図 18：投票者モデルにおける $R(t)$, $p_0(t)$, $\langle n \rangle$ の時間発展

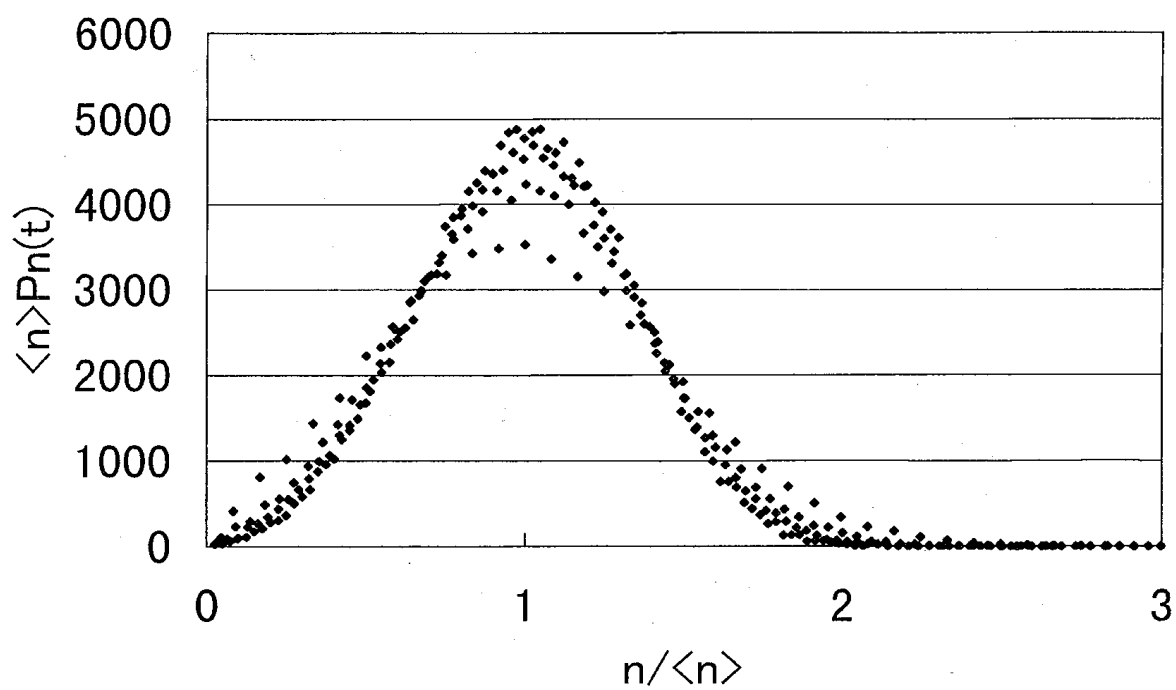


図 19：投票者モデルにおける $p_n(t)$ のスケーリングプロット

4. 議論と今後の課題

本論文では, Lemaître と Chaté のモデルをもとにした 2 次元 CML のシミュレーションを行って, その NTCB の普遍クラスを調べた。 $p_n(t)$ について動的スケーリング則が成り立つことを見出した。このモデルでは, 種々の量の時間発展に対して, べき乗則が成り立つ。そして, その指数は, 写像の結合定数に依存する。しかし, そのスケーリング関数は写像の結合定数によらない。したがって, この関数をもとにすれば g の値が異なる CML (3) をひとつの普遍クラスとして定義できる。本論文では, この関数をもとにして普遍クラスを分類することを提案した。Ising モデルに対して同様の計算を行い, やはり $p_n(t)$ に対して動的スケーリング則が成り立つことを示した。そして, そのスケーリング曲線は, 急冷した温度によらないことを述べた。ここでもスケーリング関数に着目して CML (3) と Ising モデルが, 弱い普遍性で結ばれていることを示唆した。cubic map による CML と 2 次元投票モデルについて同様のシミュレーションを行い異なる普遍クラスが存在することを述べた。

このような普遍クラスの起源については, これまで, 系の基底状態における縮退が本質的な役割を果たしていると考えられてきた。例えば, q 状態 Potts モデルは, q 重縮退した基底状態持っている。 $q = 2$ のときは, Ising モデルと同等であるが, $q > 2$ のときは, 異なる普遍クラスに属するとされてきた。実際, シミュレーションにより指数 α は q に依存することを見出すことができる。本論文で提案した $p_n(t)$ のスケーリング関数に基づいて普遍性を調べることは興味深い。

CML についてシミュレーションを行うときに注意しなければならないことがある。本論文で述べた写像 (2) と cubic map では, 2 値関数 σ を曖昧さなく定義できた。しかし, 一般の写像においてそのような関数を定義するためには, 注意深い工夫が必要である。また, シミュレーションにおいて, ダイナミクスが変数の値の更新法に依存するモデルもある¹⁵⁾。

このような事情の下では, 明らかに解析的な方法による理論的研究が必要

である。Lemaître らは、非摂動論的繰り込み群の方法によってそのような研究を始めている¹⁶⁾。そこで、彼らは、CML の NTCB は、強結合領域において、偏微分方程式である時間依存したギンツブルグ・ランダウ方程式 (Time Dependent Ginzburg Landau Equation : TDGLE) に移行すると推測している。彼等の推測の根拠は、次の 3 つである。¹⁾ 一般の CML において、連続空間極限 (continuous-space limit) においては、 g_c は、0 に近づくことを示せる。したがって、図 5 のピン止め効果は、離散格子効果 (discrete lattice effect) である。²⁾ シミュレーションの結果によると、 θ/ϕ の比は 0.4 と見積もることができるが、この値は、TDGLE における値と等しい。³⁾ g の値を大きくすると α と θ の値は、それぞれ TDGLE の値に近づくように見える。彼等は、これを“弱い普遍性”とよんだ。彼等の推測は、シミュレーションによって得られた指数の値をもとにしているため、有限サイズの効果などを排除しないと確かなことはいえない。有限サイズスケーリングの方法などによる精密な研究が望まれる。

本論文では、CML (3) と Ising モデルの“弱い普遍性”について述べた。TDGLE と Ising モデルのダイナミクスは、同じ普遍クラスに属すると考えられているから、CML (3) と TDGLE, Ising モデルが弱い普遍性で結びついているといえることができる。図 11 において CML と Ising モデルのスケーリング曲線が一致しなかった。これらの曲線は、 g の値が無限大の極限で、一致するのかもしれない。

いずれにしても、創発の普遍性をとらえようとする、これまで物理学で研究されてきた普遍クラスをより広い枠組みの中で考えなければならない。その一つの手がかりとして $p_n(t)$ の動的スケーリング則におけるスケーリング関数をもとにすることを提案したい。そのためには、この関数に対する解析的研究が必要である。

2 次元 CML の研究は、その界面の性質、 g に異方性がある時のダイナミクスなど関連する問題が数多くある。本論文で提案した視点は、それらの研究において有用なものであると思われる。

さらに、2次元 CML における普遍性の研究は、カオス系の熱力学をこえて、カオス系の動力学の体系の建設につながると考えられ広範な研究が望まれる¹⁷⁾。

参考文献と注

- 1) J. H. Holland, *Emergence* (Addison — Wesley, 1998).
- 2) B. Pullman, ed., *The Emergence of Complexity* (Princeton University Press, 1996).
- 3) K. Kaneko, ed., *Theory and Applications of Coupled Map* (Wiley, New York, 1993).
- 4) K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.* 72 (1984) 480 ; *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore, 1986).
- 5) 示量性カオスでは、正である Lyapunov 数が、系のサイズに比例して増大する。
- 6) H. Chaté, *Int. J. Mod. Phys. B* 12 (1998) 299.
- 7) A. Lemaître and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett.* 92 (1999) 1140.
- 8) A. J. Bray, *Adv. Phys.* 43 (1994) 357.
- 9) P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* 49 (1977) 435.
- 10) J. Miller and D. Huse, *Phys. Rev.* E48 (1993) 2528.
- 11) K. Binder, ed., *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* (Springer Verlag, 1979).
- 12) B. Derrida, A. J. Bray and C. Godrech, *J. Phys.* A27 (1994), L357 ; P. L. Krapivsky, E. Ben-Naim and S. Redner, *Phys. Rev.* E 50 (1994), 2474.
- 13) A. Sadiq and K. Binder, *J. Stat. Phys.* 35 (1984) 517 ; E. T. Gawlinski, M. Grant, J. D. Gunton and K. Kaski, *Phys. Rev.* B31 (1985) 281.
- 14) E. Ben-Naim, L. Franchebourg and P. L. Krapivsky, *Phys. Rev.* E53 (1996), 3076 ; 今枝辰博, *経営研究* 13 (1999) 41.
- 15) P. Marcq and H. Chaté, *adap-org/9712002* (1997).
- 16) A. Lemaître and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1993) 5528..
- 17) C. Beck and F. Schlogl, *Thermodynamics of chaotic systems* (Cambridge University Press, 1993).