〈経営研究　第13巻　第1号　平成11年9月〉

「投票者」モデルにおけるpersistenceの普遍性

今　枝　辰　博

キーワード

・投票者モデル	voter model
・persistence	persistence
・ユニバーサリティ	universality
・スケーリング則	scaling law
・粗視化	coarse graining

1. はじめに

複雑系の研究が流行して久しい[1]。しかし，「複雑系」という用語が明確に定義されていないまま使われているため，しばしば複雑系（complex system）が，complicated system と混同されている。多数・多種の構成要素から成り立っている系は，それらの相互作用により，しばしば全体として複雑な振る舞いを示す。しかし，この事だけで系を複雑系と定義することはできない。複雑系とは，そのようにして現れた大局的な振る舞いが，個々の構成要素の振る舞いやルール・関係を変化させるところにその本質がある。社会・経済システム，生命，知能などがその例と考えられ，さまざまな野心的な研究がなされているが，未だ一般的な研究方法はない。むしろ，定義をしないまま

研究したほうが実り多いという立場に立つ研究者もある。

しかし，複雑系を科学的な研究の対象とするならば，われわれはそれらの複雑な現象の背後にある，より普遍的な性質を見ようとしなければならないであろう。そして複雑な振る舞いをどのようにして特徴づけるかを探らねばならない。このように，対象すらも明確でない複雑系の研究では，何らかのモデルを構成した後，そのモデルをコンピュータ上でシミュレートして，どのような全体的な振る舞いが現れるかを探るという「構成的手法」が用いられることが多い。

本論文では，そのような立場から，基本的な確率モデルのひとつである，投票者モデル[2)] を考察する。このモデルは，いわゆる“toy”モデルであり，上述した意味では，複雑性を示すわけではない。しかし，persistence という性質に注目すると，「投票者」の単純な行動にもかかわらず，系全体として自明でない（non-trivial），普遍的な（universal）振る舞いを示す。したがって，このモデルは複雑系の研究を着実に進めていく上で，良い出発点となるであろう。

本論文では，このモデルにおいて，どのような普遍クラス（universality class）が存在するかを考察する。第2節では，投票者モデルを定義し，persistence について述べる。第3節では，1次元 q 状態投票者モデルにおいて新しい普遍クラスが存在することを示す。第4節では，persistence の空間分布の普遍性について述べる。第5節では，本論文で得られた結果と，次の課題について述べる。

2. モデル

d 次元超格子空間を考える。N 人の投票者が，格子間隔 1 の各格子点に並んでいるとして，それぞれの投票者は，q 種類の意見のうちのどれか一つをもつとする。その意見を表わす変数を$s(i)$（i = 1, 2, …, N）とすると $s(i)=\{1, 2, \cdots, q\}$ である。周期的境界条件を課す。また時刻を離散変数

t で表わす。ある時刻 t において，i 番目の投票者は，その最隣接格子点の中からランダムに一つの格子点を選び，その点の投票者が持っていた意見を，t ＋ 1 時刻での自分の意見とする。このようにして定義されたダイナミクスをもつ確率モデルを d 次元 q 状態投票者モデルという。本論文では，初期状態において，各投票者はそれぞれランダムに意見をもつとする。そして，その後の系の時間発展を問題とする。

投票者モデルは，最初遺伝学で定式化された[3]。その後，この問題が Brown 運動の再帰性と密接に関わることから，数学において深く研究されている[4]。特に，d が 1 または 2 のときには，系は，最終的に全員が合意した状態に落ち着くことが証明されている。また，d ＞ 2 のときは，いくつかの意見が共存した状態に達することも示されている。一方，このモデルは，物理学の研究対象であるスピン系や反応拡散系のものと，ある条件の下で，同等である事が知られている[5]。

最近，スピン系における秩序形成についての研究において persistence という性質が発見され，注目されている[6]。そのために，この性質を持つ最も簡単なモデルとして，物理学においても投票者モデルの研究がなされるようになった[7]。

persistence は，次のようにして定義される。時刻 0 から t まで，一度も意見を変えなかった投票者（persistent voters）の割合を $P_0(t)$ で表す。この量は，$P_0(0) = 1$ から，時間とともに，減少していく。d ＝ 1 の場合に，充分時間が経った後，その変化に対して，

$$P_0(t) \propto t^{-\theta} \tag{1}$$

という，べき乗則が成り立つことを Derrida らと Krapivsky らとがほぼ同時に見出した[6]。一方，秩序形成のダイナミクスの研究から，この系では，充分時間が経った後，同じ意見を持った投票者は平均サイズ $l(t)$ の領域を形成することが知られている[8]。そして，そのサイズは，$l(t) \propto t^{\alpha}$ というべき乗則によって増大する。すなわち，$\theta' = \theta/\alpha$ とすると，

$$P_0(t) \propto l^{-\theta'} \tag{2}$$

とかける。これは，persistenceの性質が，セミマクロな量$l(t)$によって，決まることを意味する。したがって，θの値は，モデルのミクロな詳細によらない普遍的な値を持つはずである。実際，シミュレーションや理論的な計算によって，θの値は，d と q のみによることが示されている。このような普遍性をもった，べき乗則は，相転移に伴う臨界現象でよく知られており，いくつかの独立な指数が存在する。しかし，θの値を，それらの指数から，導くことはできない。すなわち，その値は，自明でない（non-trivial）。このような普遍的で自明でない性質がさまざまな系に存在することから，persistence と呼ばれて，注目を集めるようになった[5]。

さらに，この persistence を拡張した量も研究されている。Ben-Naim ら[9]は，$d=1$で$q=2$とした投票者モデルにおいて，時刻0からtまでの間に，n回意見を変えた投票者の割合の分布についてスケーリング則を見出した。この割合の分布は，dと初期時刻において意見1を持っている投票者の割合n_0のみによる。

また，ごく最近，Manoj ら[10]は，やはり$d=1$で，$q=2$の場合に，persistent site 間の距離について新しい動的指数（dynamic exponent）が存在する事を示した。彼らは，その普遍クラスがdとn_0によって特徴づけられると主張している。

本論文では，Ben-Naim ら[9]および Manoj ら[10]の研究を1次元q状態投票者モデルに拡張し，これらとは異なった，新しい普遍クラスが存在することを示す。

3. q状態投票者モデル

Derrida ら[6]は，1次元q状態投票者モデルの persistence を調べた。$q=2$, 3, 5, 10, 10^4の場合について，コンピュータ・シミュレーションを行ない，充分時間が経った後では，persistent site の割合$P_0(t)$が，べき乗則

$$P_0(t) \propto l^{-\theta_q} \tag{3}$$

に従って減少することを見出した。さらに persistence 指数θ_qは，q の値によって異なり，$\theta_2 = 0.37$，$\theta_3 = 0.53$，$\theta_5 = 0.70$，$\theta_{10} = 0.82$，$\theta_\infty = 1.0$ という結果を得ている。また，その後，$\theta_2 = 3/8$ であることが厳密に導かれている[11]。

本論文では，シミュレーションにより，この 1 次元 q 状態投票者モデルにおける persistence の普遍性を探る。

シミュレーションによって，有意な結果を得るためには，扱う系のシステムサイズ N を大きくして，有限サイズの影響を可能な限り少なくしなければならない。しかし，サイズを大きくすれば，計算時間が増大する。一方で時間が経つにしたがって，隣同士の投票者の意見がそろった領域が広がっていくから，通常のモンテカルロ法を用いてシミュレーションを行うと，急速にその効率が悪くなっていく。しかし，われわれが知りたいのは，まさにこの十分時間が経った後の系の振る舞いである。

ここでは，2 状態モデルに対する Ben-Naim ら[9] のアクティブボンド・アルゴリズムを q 状態に拡張して用いる。アクティブボンドとは，隣り合った格子点の投票者の意見が異なるとき，それらの格子点を結ぶ線分のことである。アルゴリズムを次のように定義する。

(1) 系内にあるアクティブボンドのリストを作る。
(2) すべてのアクティブボンドの中から，ランダムに 1 つのボンドを選ぶ。
(3) ボンドの両端の投票者のどちらかをランダムに選び，その投票者の意見をもう一方の投票者の意見に変える。
(4) 時間をアクティブボンドの数の逆数だけ進める。
(5) アクティブボンドについての新しいリストを作る。

時間が経つにしたがって，アクティブボンドの数は減っていくから，このアルゴリズムは，大変効率的である。本論文では，$N = 10^4$ の系について $t = 10^4$ MCS までシミュレーションを行った。ここで，1 MCS は，すべての投票者が試行を行う回数に相当する。したがって，今の場合は，1 MCS $= 10^4$ で

ある。

まず,われわれのシミュレーションで用いたアルゴリズムの有効性を示す。図1にいくつかのqに対する，$P_0(t)$と時間tをプロットした。それぞれ，初期条件の異なる100回のシミュレーションの結果を平均してある。べき乗則は，よく成り立っている。このプロットから得られたθ_qの値は，$\theta_2 = 0.37$，$\theta_3 = 0.54$，$\theta_5 = 0.71$，$\theta_{10} = 0.82$，$\theta_\infty = 1.04$で，Derridaら[6]が通常のモンテカルロ・シミュレーションを行って得た結果とよくあっている。ここで，θ_∞は，q＝Nとした場合の結果である。

時刻0からtまでの間に，n回意見を変えた投票者の割合$P_n(t)$を図2に示す。どのqの場合も，分布関数$P_n(t)$の形は，時間とともに，変化していく。比較のためq＝2の場合も示してある。

q＝2の場合の分布は,n＝1にピークを持ったまま,時間とともに広がっていく。(図2 (i) a, b) これは，一度意見を変えただけで，投票者が最終状態に落ち着く場合が多いことを示している。

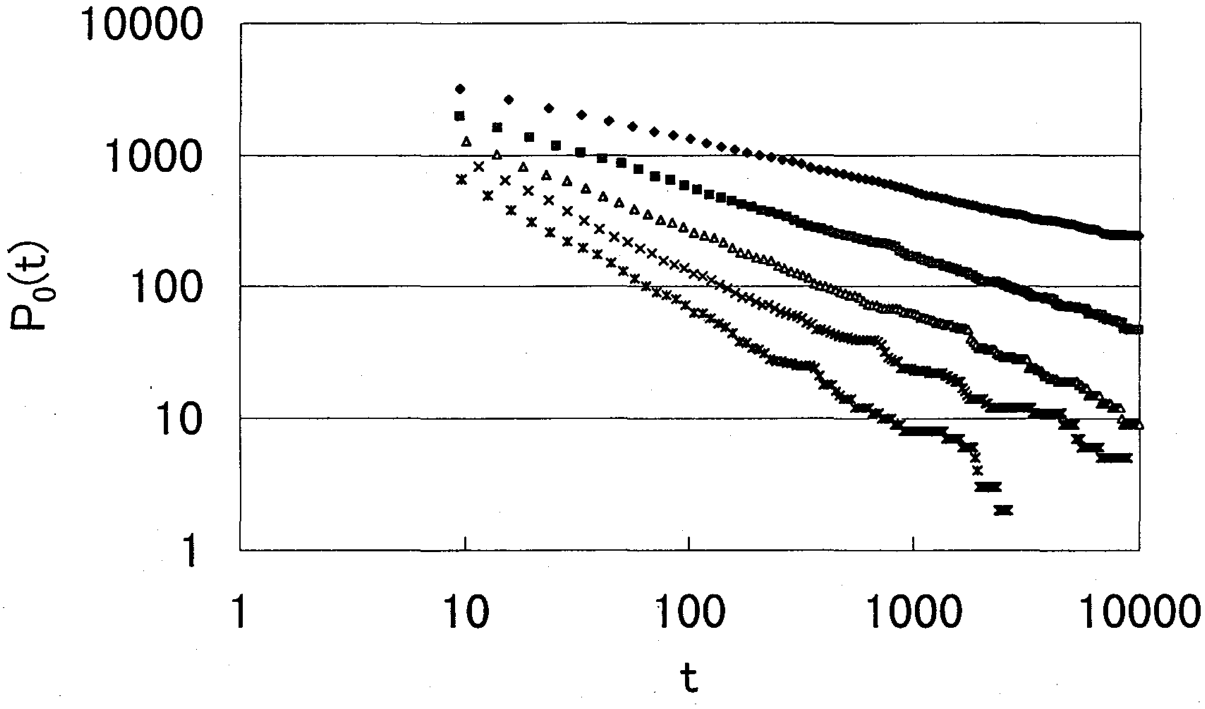


図1 $P_0(t)$の時間変化。上から下へ、q = 2, 3, 5, 10, ∞のときのもの

図 2 (i) a
$P_n(t)$の形の変化
縦軸と横軸のスケールの違いに注意
q = 2　t = 318

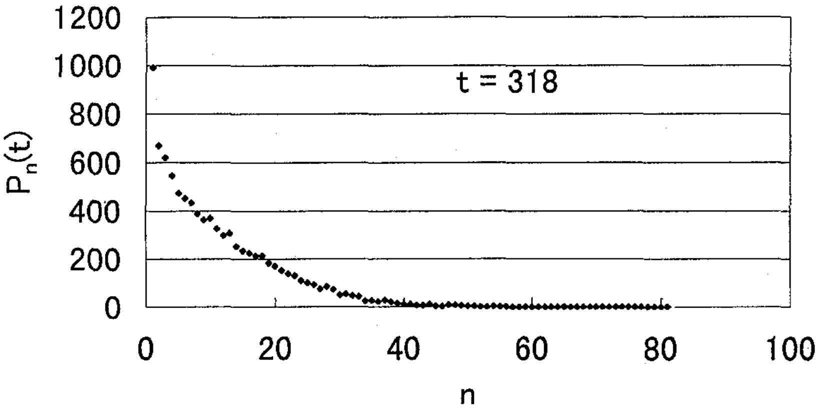


図 2 (i) b
q = 2　t = 7343

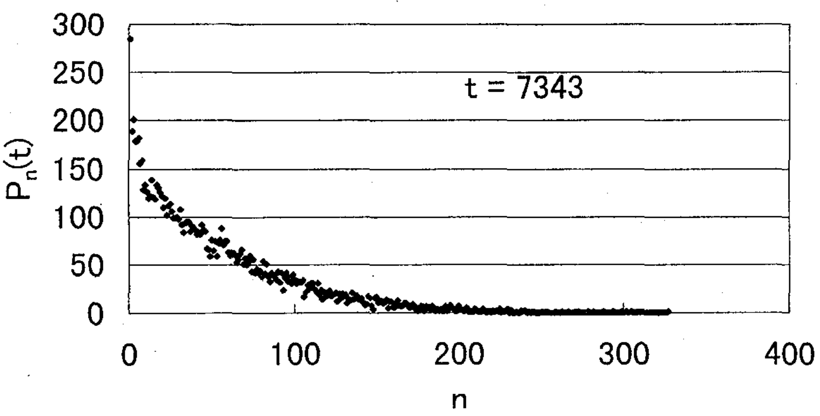


図 2 (ii) a
q =∞　t = 87

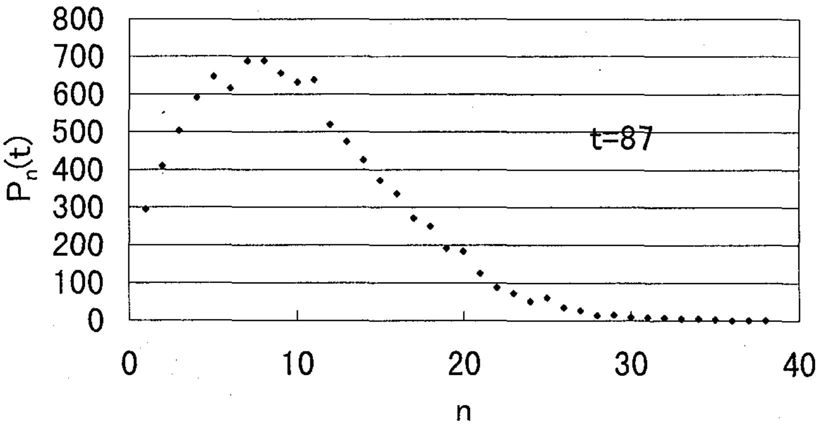
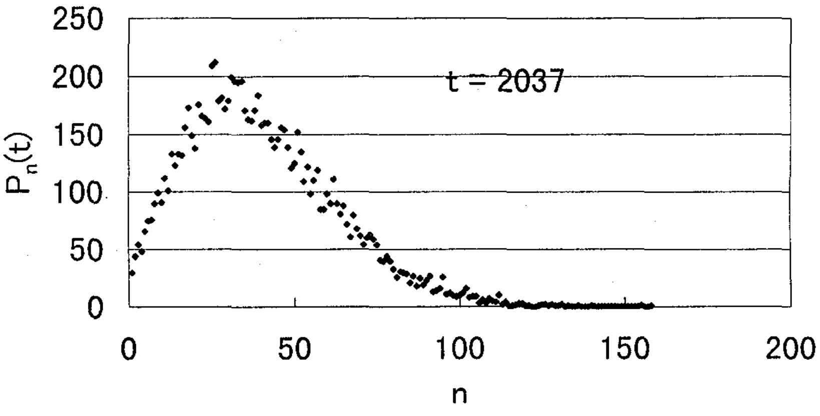


図 2 (ii) b
q =∞　t = 2037



一方，q ＞2の場合には，分布関数の形がこれとは，まったく異なる。このことを明確に示すために，q＝∞の場合の分布関数を図2（ii）a，bに示した。q＝2の場合と異なり，はっきりとしたピークが存在する。その位置は，n＞1にあり，時間とともに，nの大きな値に移動する。nの小さなところでの$P_n(t)$の値は，時間とともに急速に減少し，分布の幅は大きくなる。これは，多くの意見を選択しうるために，最終状態に落ち着くまでに何回も意見を変える投票者が多いことを示している。ここには，図を示さないが，q＝3, 5, 10, 100の場合も，q＝∞の時と同様に，n＞1にピークがある。

したがって，意見を変えた回数の平均値

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{N} nP_n(t) \tag{4}$$

は，どのqの場合も，時間とともに増大する。その，<n>の時間変化を図3に示す。すべてのqについて，べき乗則$\langle n \rangle \propto t^{a_q}$が成り立っている。シミュレーションで得られた値は，$a_2 = 0.52$，$a_3 = 0.51$，$a_5 = 0.51$，$a_{10} = 0.53$，$a_\infty = 0.52$である。これは，このモデルのダイナミクスが，投票者の意見が異なる領域の間にある界面のBrown運動で記述できることを意味する。

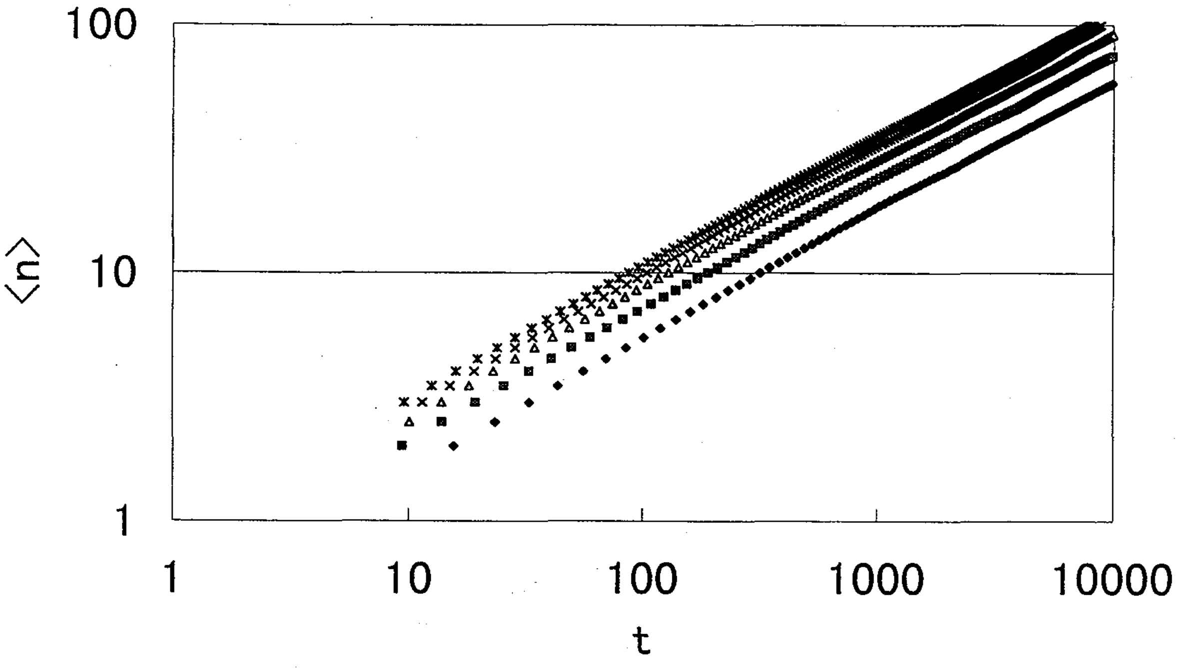


図3 <n>の時間変化。上から下へ、q＝2,3,4,10，∞のときのもの。

分布関数 $P_n(t)$ は，2つの変数nとtの関数であり，その分布の形やそれぞれのnでの値は，時間とともに急速に変化している。この分布関数の形と時間変化を厳密に求めることは，一般に困難である。

しかし，個々の要素の相互作用の結果として全体に現れる振る舞いは，しばしばその現象に特徴的な時間のスケールと長さのスケールを持つ。以下では，この変化の背後に，自明でない普遍的な振る舞いがあることを示す。

このような問題においては，平均場近似をして求めた解のスケーリング極限での性質が手がかりになることがある。平均場近似では，1人の投票者の意見が系内の全投票者に影響すると考える。簡単のために，ここでは，時間を連続変数として扱うと，容易に $P_n(t)$ は，次の方程式を満たすことがわかる。

$$\frac{dP_n}{dt}=P_{n-1}-P_n \tag{5}$$

ここで，$P_{-1}=0$ とする。また初期条件は $P_n(0)=\delta_{n,0}$ とする。$\delta_{n,0}$ は，クロネッカーのデルタである。(5)の解は，次のポアソン分布であることがすぐ分かる。

$$P_n(t)=\frac{t^n}{n!}e^{-t} \tag{6}$$

したがって，平均 $<n>$ と標準偏差σは，それぞれ，$<n>=t$,
$\sigma=\sqrt{<n^2>-<n>^2}=t^{1/2}$ である。

ここで，この解のスケーリング極限をとる。すなわち，$(n-t)/t^{1/2}$ を有限に保ちながら，t→∞，n→∞の極限をとる。すると，次のスケーリング形を得る。

$$P_n(t)\propto\frac{1}{\sigma}G((n-<n>)/\sigma) \tag{7}$$

ここで，$G(x)=1/\sqrt{2\pi}\exp(-x^2/2)$ である。

われわれの場合においても，このようなスケーリング極限が存在すると仮定する。ただし，$<n>\propto t^{1/2}$ であり，さらに，分布を特徴づける量がこのスケールのみであるとして，$\sigma\propto<n>$ とする。すなわち，

$$P_n(t)\propto\frac{1}{t^{1/2}}G_q(n/t^{1/2}) \tag{8}$$

と仮定する。

図4にスケーリングプロットを示す。異なる時刻における分布関数が単一

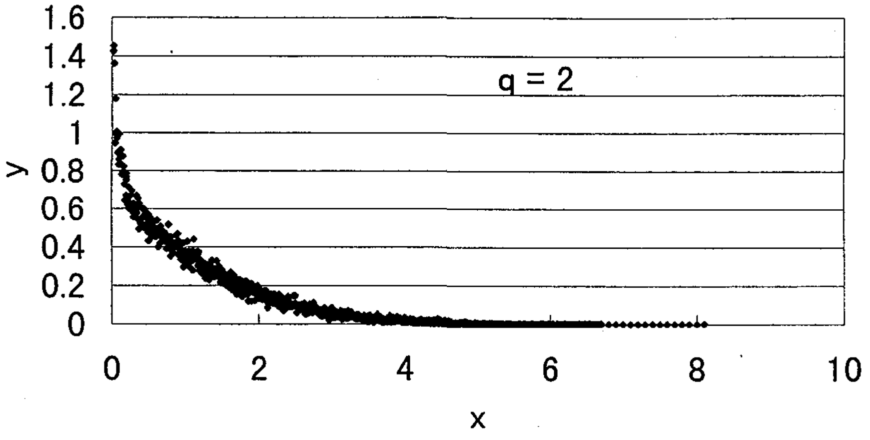


図4（1） q＝2

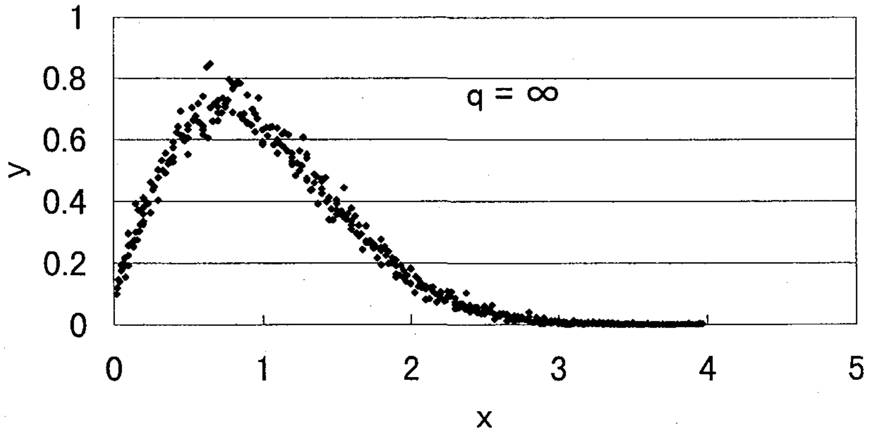


図4（2） q＝∞

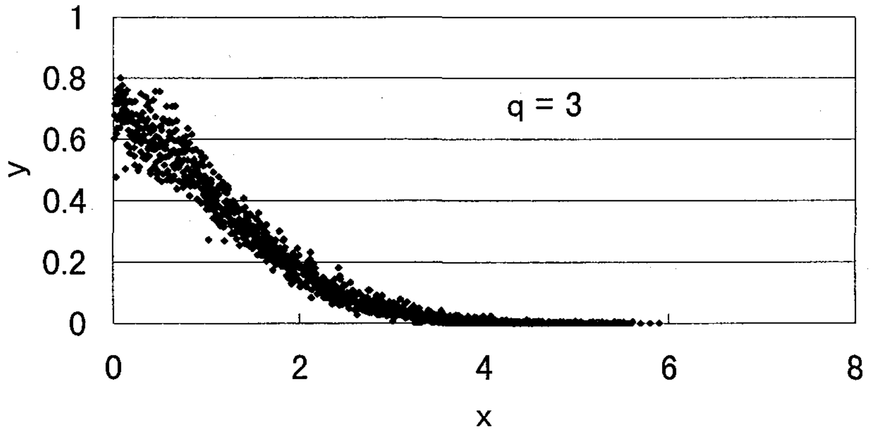


図4（3） q＝3

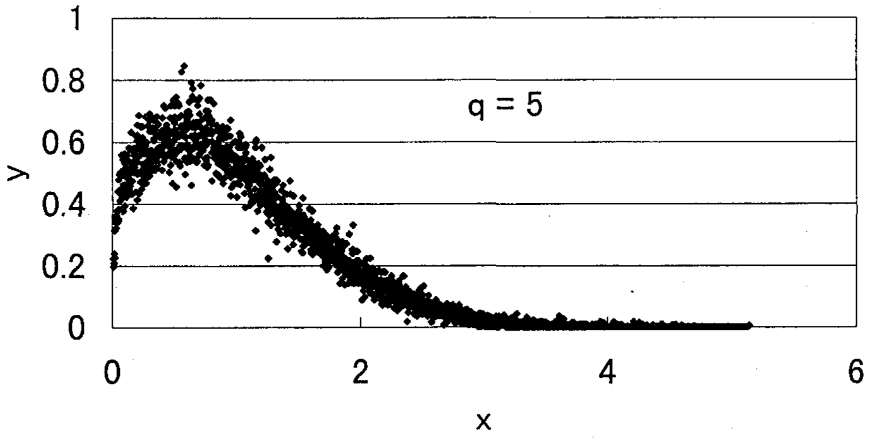


図 4（4） q = 5

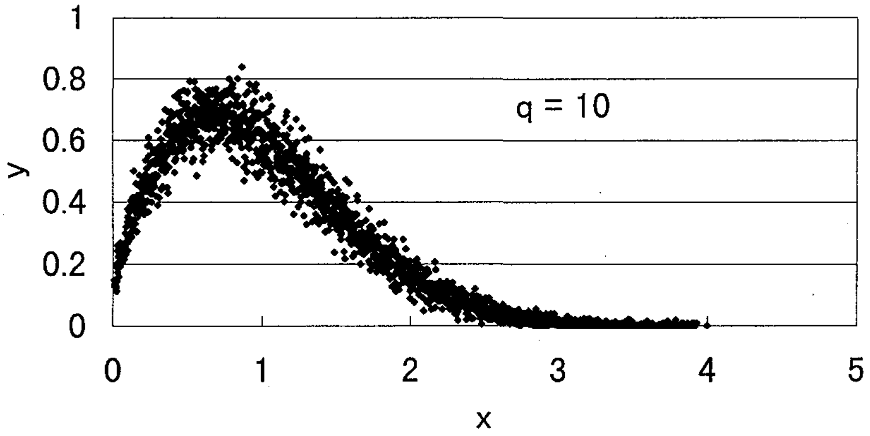


図 4 (5) q = 10

図 4 式 8 のスケーリングプロット

いずれも、$y = t^{1/2}P_n(t)$, $x = n/t^{1/2}$である。

それぞれ、t = 87 から t = 8900 までの間の 5 つの時刻における値をプロットしてある。

の曲線で近似できることがわかる。q = 2 と q =∞におけるスケーリング曲線の形の違いは，明白である。すなわち，これらの場合は，異なる普遍クラスに属する。

スケール変数 $x = n/t^{1/2}$ が小さいところでのスケーリング曲線は，次のようにして計算できる。$P_0(t) \propto t^{-\theta_q}$であることに注目すると，(8) から関係式

$$z = 2\theta_q - 1 \qquad (9)$$

を導ける。したがって，q = 2 の時は，z =－ 1/4 であり，q =∞では，z = 1 である。また，$\theta > 1/2$では，n > 1 にピークがあることがわかる。

q = 3 のときのスケーリング・プロットを図 4 (3) に示す。われわれのシミュレーションでは，$\theta_3 = 0.539$ であるから，そのとき，z = 0.078 と小さな

値になる。したがって，この場合は，$t = 10^4$でもまだ充分なスケーリング領域に達していないことを示している。

q = 5,10 の場合のスケーリング・プロットもあわせて示す。普遍クラスは，q = 2 の場合と，q > 2 の場合とに分けることができる。さらに，q =∞のクラスによって，q > 2 の場合のクラスの性質を代表させることができる。

この違いは，投票者モデルと同等である反応・拡散系に置き換えて考えると理解しやすい[5]。意見が異なる投票者の間の界面を粒子 A として表すと，明らかに A は直線上で Brown 運動をする。そして，粒子同士が衝突した時，確率 q／(q−1)で，A + A → 0，また確率 (q−2)／(q−1)で，A + A → A という反応を起こす。q = 2 の場合には，反応 A + A → 0 のみが起こる。一方 q→∞では，反応 A + A → A が起こる確率が 1 に近くなる。2 < q <∞では，これら 2 つのダイナミクスが混在する。そして，系全体のダイナミクスは，時間が進むにしたがって漸近的に，反応 A + A → A によって支配されることを我々のシミュレーションの結果は示している。

4. 空間分布の普遍性

Manoj と Ray[9] はごく最近，2 状態投票者モデルと同等である A + A→0 モデル[5] において" empty interval distribution" (EID) を導入して，persistent site の空間分布を調べた。EID は，時刻 t においてランダムに選んだ，2 つの連続した persistent site が，距離 k だけ離れている確率である。

彼らは，$e(k, t)$に対して，次の動的スケーリング則が成り立つと主張している。

$$e(k,\ t) \propto t^{-\omega} k^{-\tau} f(k/r(t)) \tag{10}$$

ここで，$r(t)$は，persistent site 間の平均距離で，EID のモーメントを

$$I_m(t) = \sum_k k^m e(k,\ t) \tag{11}$$

と定義したとき，

$$r(t)= I_2(t)/I_1(t) \tag{12}$$

で定義される。彼らは，シミュレーションを行って，充分時間が経った後に，$r(t)$が

$$r(t) \propto t^z \tag{13}$$

と増大することを確かめた。また，分布（10）を特徴づける，自明でない指数の間に，スケーリング則

$$\omega=\theta, \quad z(2-\tau)=\theta \tag{14}$$

が成り立っていることを見出した。

（12）が成り立つのは，persistent site の空間分布がただ一つのセミマクロな長さ$r(t)$で特徴づけられるということを表わしている。このことは，モデルの詳細によらない普遍クラスの存在を意味する。

われわれの q 状態投票者モデルについても，同様に，$r_q(t)$を定義することができる。シミュレーションによって，この量の計算をした結果を図 5 に示す。すべての場合に，べき乗則

$$r_q(t) \propto t^{z_q} \tag{15}$$

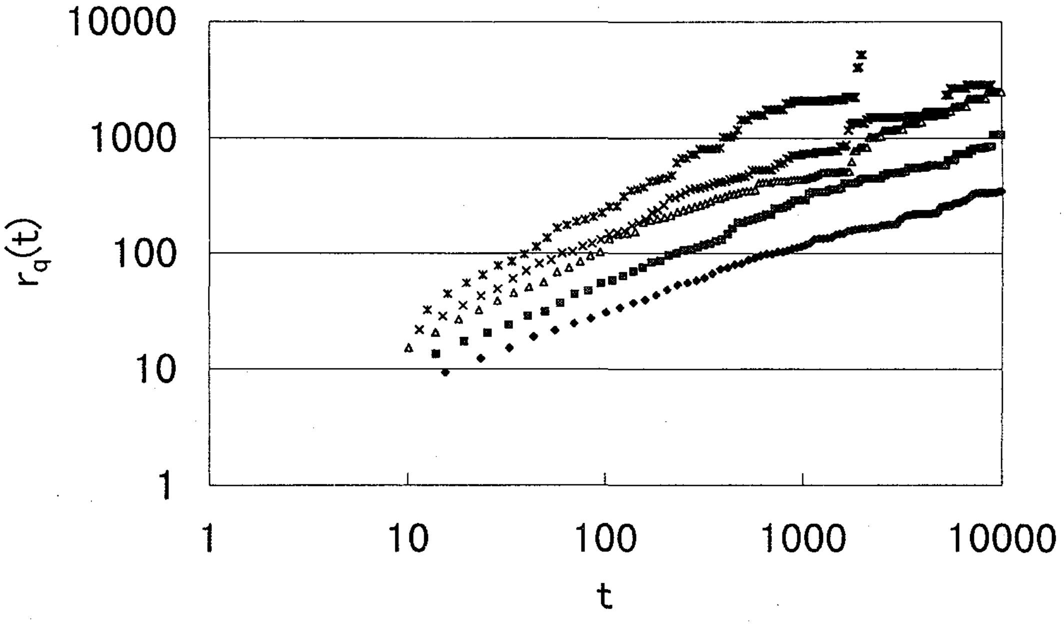


図 5

が良く成り立つ領域があることがわかる。指数の値は，それぞれ $z_2 = 0.55$, $z_3 = 0.63$, $z_5 = 0.71$, $z_{10} = 0.70$, $z_{100} = 0.80$, $z_\infty = 0.98$ と求めることができる。

q ＝∞のときの z の値は 1 に近い。これは，$<n^2>/<n> \propto t^{-\theta_q}$ であることを示している。すなわち，EID の分布が k についてランダムであることを意味する。したがって，この場合の分布は自明（trivial）であり，Manoj らのスケーリング則は，成り立たない。2 ＜ q ＜∞の場合は，シミュレーションで得られた分布に，スケーリング則に従う部分とそうでない部分が混在する。これは，前節の最後に述べた，2 つのダイナミクスが共存しているからである。このとき，EID の分布は，スケーリング則が成り立つ時間領域を超えると，漸近的に，自明でランダムな分布に近づく。従って，最終的には，式（10）のようなスケーリング則は成り立たない。このようなクロスオーバー現象について詳細な結論を導くためには，シミュレーションのサイズを大きくして，より長時間にわたる計算をする必要がある。

5. まとめと今後の課題

本論文では，1 次元 q 状態投票者モデルにおける persistence について考察した。

時刻 0 から t までの間に，n 回意見を変えた投票者の割合 $P_n(t)$ について，スケーリング則が成り立つことをコンピュータ・シミュレーションによって示した。q ＞ 2 の場合には，q ＝ 2 の時とは異なる，新しい普遍クラスが存在することを見出した。

persistentsite の空間分布について，その特徴的長さ，$r_q(t)$ が，べき乗則によって増大することを示した。しかし，q ＝∞では，EID に対する Manoj らのスケーリング則は成り立たない。また，2 ＜ q ＜∞では，EID は，スケーリング領域から，自明な分布を持つ領域へのクロスオーバーを示すことを論じた。

投票者モデルを，それと同等である 1 次元反応拡散モデルにマップして，

これらの振る舞いについて論じた。2 種類のダイナミクスが共存するとして，シミュレーションの結果を解釈した。

ここで，各格子点での「投票者」の意見を表わす変数につて述べておく。ここでいう「投票者」は決して，個人である必要はない。ある集団についての平均化された「意見」，すなわち何らかの粗視化をほどこした変数と考えることができる。スケーリング則　式（8）は，系の時間発展には，モデルのミクロな詳細が影響しないことを示しているのであるから，むしろ当然である。そのように考えれば，この「投票者モデル」が決して個別の問題についての特殊な結果を導くためのものではないことが理解されよう。

最後に，今後の課題について述べる。本論文では，初期条件として，集団の中にすべての意見が等確率である，偏りのない分布を仮定した。この分布に偏りがある場合の普遍クラスについての研究が考えられる。とくに，少数者の意見が集団の中でどのようにして広まっていくかについての時間発展則は，興味深い。また，空間次元が 2 次元の場合には，意見が広まっていく際に，何らかの空間パターンが描かれるであろう。そのパターンを決定する数理的な法則を探りたい。

参考文献

1）R. Badii and A. Politi, *Compexity*, （Cambridge University Press, 1997）.

2）T. M. Ligett, *Interacting Particle Systems*, （Springer-Verlag, New York, 1985）; R. Durett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, （Wadsworth, Belmont, 1988）.

3）M. Kimura and G. H. Weiss, *Genetics* 49 （1964）, 313.

4）R. A. Holley and T. M. Ligett, Ann. Prob. 3, （1975）, 643.

5）V. Privman, *Nonequiliburium Statistical Mechanics in One Dimension*, （Cambridge University Press, 1997）.

6）B. Derrida, A. J. Bray and C. Godrech, J. Phys. A 27 （1994）, L357; P. L. Krapivsky, E. Ben-Naim and S. Redner, Phys. Rev. E 50 （1994）, 2474.

7）D. Stauffer, J. Phys. A 27 （1994）, 5029; A. J. Bray, B. Derrida and C. Grdrech,

Europhys. Lett. 27 (1994), 175.
8) A. J. Bray, Adv. Phys. 43 (1994), 357.
9) E. Ben-Naim, L. Franchebourg and P. L. Krapivsky, Phys. Rev. E 53 (1996), 3076.
10) G. Manoj and P. Ray, cond-mat/9901130 (1999).
11) B. Derrida, J. Phys. A28 (1995), 1481; B. Derrida, V. Hakim and V. Pasquier, Phys. Rev. Lett. 75 (1995), 751.