

# 時系列データの識別と R/S 解析

— データ解析の新視点 —

大 石 展 緒  
田 窪 正 則

---

## 〈キー・ワード〉

- R/S 解析 (Rescaled Range Analysis)
- 持続的系列 (persistent time series)
- フラクタル次元 (fractal demension)
- 長期の記憶関数 (long memory function)
- 相関積分 (correlation integral)
- 相関次元 (correlation dimension)

## はじめに

時系列観測値は、従来より市場の動向を分析する際の基本的かつ重要なデータとして知られている。時系列データの分析に関して、R/S 解析 (Rescaled Range Analysis) と呼ばれる古くして新しいアプローチは、時間を繰返しのプロセスとみなして観測値に内在する長期的な記憶効果を推定しうる機能をもつ。当該アプローチは E.E.Peters の実証研究<sup>(\*)</sup>に見られるように、資本市場の計量的分析に新しい視点を提供しているが、同時に分析の領域を拡大することにより、一般的市場動向の捉え方にも活用できる潜在的な可能性を秘めている。本では、R/S 解析の基礎と数値例を中心に、当該アプローチの活用についてもふれている。

## 1 ハースト指数の重要性

市場動向の分析に従事した者なら、時系列データの重要性や有効性を認識しているはずである。一般的に、市場動向を示す各種の観測値に関するデータは、次の3種に分類されている。

- ① 時系列データ (time-series data)
- ② 横断面データ (cross-section data)
- ③ 異時点間横断面データ (moving cross-section data)

第一の時系列データは時間の推移に伴う変化の状態把握に焦点があり、年度別、四半期別、月別、旬別、週別などの区分で観測値が識別される。第二の横断面データは観測値の空間的な広がりには焦点をおいたもので、一時点での観測値を都道府県別に配列するといった形態をとる。

第三の異時点間横断面データは時間と空間を同時に考慮するもので、年度別、都道府県別に観測値を整備したものはその典型である。これら3種のデータの内、市場動向の分析に欠くことのできないものが、第一の時系列データである。ハースト指数は、本来的には河川の流量といった自然現象を対象とした時系列の経験則に根ざしたもので、水文学者 H. E. Hurst の創見にかかわるものである。本節では、まずハースト指数の概念より出発し、時系列データの類型化、R/S解析の具体的展開などを順次説明する。

### 1-1 ハースト指数と時系列データの類型化

自然現象の時系列値に関するユニークな分析で知られている H. E. Hurst は、ハースト指数  $H$  という頑強な統計量を提示したが、これは非整数ブラウン運動 (fractional brownian motion) におけるバイアスの尺度を示すものである。この統計量は、所与の時系列を類型化できる機能を有している。類型化は時間の記憶を視点として、観測値の従属性を識別することである。アプローチの実際は、R/S解析という高度なデータ集約的 (data-intensive) プロセスから導くことができる。

われわれは、ともすると時間を軽視するきらいがあり、ある事象がたとえシステムを攪乱させても、短期間のうちに均衡状態に復元すると思いがちである。現実の世界では、事象は長期にわたってわれわれに影響を与える。市場の動向も、われわれの経験的世界と同様に、事象の影響を長期間こうむると考える方がより自然であろう。「本質的に、われわれが現在どこにいるかは、これまでどこにいたかにかかっているものであり、どこに行くかは、今何をしているかに依存する。時間の影響を調べる枠組を一般化することによって、市場の動きを理解するための分析能力と潜在能力を高めることができるのである<sup>(\*)2)</sup>。」時間を繰返しのプロセスと考える場合、現在が将来に与える影響は、次式<sup>(\*)</sup>で与えられることが知られている<sup>(\*)3)</sup>。

(\*) (1) 式に示す相関の尺度は、すべての時間の増分に適用できない点に注意を要する。その適用は、後述するハースト指数 (H) が 0.50 に収束する前のデータに関してなされる。

$$C = 2^{(2H-1)} - 1 \quad (1)$$

ここに、C は相関の尺度、H はハースト指数である。ハースト指数の求め方については後述する。

ハースト指数 H が取りうる数値は、表 1 に見るように 3 種のパターンに識別できる。

第一のパターンは  $H=0.50$  の場合で、所与の観測値時系列がランダムであることを示す。すなわち、事象はランダムで無相関である。ちなみに、前記

表 1. 時系列値の 3 種のパターン

識 別	ハースト指数の存在範囲	時系列の名称	時系列の特徴
第1のパターン	$H=0.50$ の場合	ランダム系列	現在は、将来に影響を及ぼさない。
第2のパターン	$0 \leq H < 0.50$ の場合	反持続的系列	エルゴートの系列で、いわゆる上昇下降の反転が激しい。
第3のパターン	$0.50 < H \leq 1.00$ の場合	持続的系列	トレンドのある系列で、非整数ブラウン運動に従う。時間に長期的記憶効果が認められる。

1 式に、 $H=0.50$ を代入する。

$$\begin{aligned} C &= 2^{(2H-1)} - 1 \\ &= 2^{(2 \times 0.50 - 1)} - 1 \\ &= 2^0 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

2 式の計算結果が示すように、事象の無相関性、つまり現在が将来に影響を及ぼさないことがわかる。

第二のパターンは、 $0 \leq H < 0.50$ の場合で、一般に反持続的系列 (antipersistent time series) と呼ばれるものである。

一例として、 $H=0.25$ を採用すると、

$$\begin{aligned} C &= 2^{(2H-1)} - 1 \\ &= 2^{(2 \times 0.25 - 1)} - 1 \\ &= 2^{-0.50} - 1 \\ &= 0.70711 - 1 = -0.29289 \end{aligned} \quad (3)$$

となり、将来への影響はその程度が小とはいえ、負の相関を示している。このような時系列は、当該システムが前期に上昇していれば、次の期間に下降する可能性が高く、逆に前期が下降ならば、今期は上昇の可能性を示唆する。非持続的な動きの強さは、ハースト指数 $H$ がどの程度0に近いかによって決定される。また、この種の時系列は変化の方向性が頻繁に反転するため、ランダムな系列よりもこま切れな動きを示すといった特性をもつ。

第三のパターンは $0.50 < H \leq 1.00$ の場合で、いわゆる持続的系列 (persistent time series) と呼ばれる長期記憶効果 (long memory effects) によって特徴づけられる点に、そのユニークさがある。「理論的に見て、今日の出来事は、未来永劫に影響を与える。カオス動態の立場から、初期条件に対する敏感な依存性が存在する。この長期にわたる記憶は、タイム・スケールに関係なく生起する。あらゆる日々の変化は将来のあらゆる日々の変化に関連し、このことは週別の変化に対しても同様である。タイム・スケールではなく、フラクタル時系列 (fractal time series) にキーとなる特性が存在するのである (\*4)。」持続性のある時系列は、いわゆるトレンドが

見られる系列であり、自然界のみならずマーケティング活動が対象とする市場においても数多く発見されている。参考までに、先の 1 式を用いて、 $H = 0.75$  の場合の将来に対する影響の度合いを求めてみる。

$$\begin{aligned} C &= 2^{(2H-1)} - 1 \\ &= 2^{(2 \times 0.75 - 1)} - 1 \\ &= 2^{0.5} - 1 \\ &= 1.41421 - 1 = 0.41421 \end{aligned} \quad (4)$$

B. Mandelbrot は Hurst のナイル川の貯水々準が時間の経過につれて平均水準を中心にどのような変動をもたらすかの研究を考察し、「ハースト指数  $H$  はほとんど常に  $\frac{1}{2}$  より大きいという、全く予期しなかった結果に到達し、ナイル川の各年の流量は独立とは程遠く、 $H = 0.9$  であった<sup>(\*)5)</sup>」と、常識的な思い込みを否定する結果を公表している。

われわれは、市場動向も自然の一部という発想をベースに、長期記憶効果の分析を試みたいのである。

## 1-2 ハースト指数とフラクタル

前述のように、われわれはハースト指数  $H$  を用いて、所与の観測値系列のパターン化について概説した。3 種のパターンの内、特に注目に値するのは、 $0.50 < H \leq 1.00$  で与えられる第三のパターンである。かかる持続性のある時系列は非整数ブラウン運動、すなわちバイアスのあるランダムウォークで記述できるためフラクタルとみなされる。非整数ブラウン運動では、時間のスケールを越えて、事象間に相関性が生起する。この相関性のために、二つの事象が連続して起こる確率は 0.5 ずつではない。ハースト指数は、二つの事象が連続的に起こりうる尤度を記述するもので、例えば、ハースト指数  $H$  が  $H = 0.8$  であれば、時系列の最後の動きがプラスである場合、次の動きもプラスである確率は基本的に 80% あるとみなすことができよう。

Mandelbrot は、ハースト指数  $H$  の逆数がフラクタル次元 (fractal demension) になることを証明している<sup>(\*)6)</sup>。すなわち、時系列のフラクタ

ル次元を  $\alpha$  とすると,

$$\alpha = \frac{1}{H} \quad (5)$$

である。例えば,  $H=0.8$  ならば, フラクタル次元  $\alpha$  は,  $\alpha = \frac{1}{0.8} = 1.25$  というように, 確率分布のフラクタル次元は 1 と 2 の間の数値を取る。また,  $H=0.5$  であれば,  $\alpha = 2$  となる。これは, つまりランダムウォーク (random walk) が真の 2 次元ということで, ミツバチの飛跡のように平面を埋めつくすことになる。そして, ハートスト指数が 1 に接近するほど時系列のノイズは少なくなり, 多くの同一の符号を有する観測値が連続するのである。先の 5 式は確率空間のフラクタル次元を測定する公式といえよう。

### 1-3 R/S 解析と数理的背景

R/S 解析は, 先にも述べたように, 高度なデータ集約的プロセスから構成されている。解析の焦点はスケール変換レンジ (rescaled adjusted range) の導出プロセスとハースト指数の計算法にあるが, これらの概要と計算ステップさらには数値例を取りあげる。

#### (1) 基礎知識としての時系列の修正済レンジ

Hurst の研究は, 確率的なプロセスの構造を把握する際の尺度を提供してくれる数学的かつ科学的アプローチである。はじめに,  $n$  個の連続的な値から構成されている時系列観測値を  $\{x_r\}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) で表現する。当該時系列値の平均  $\bar{x}$  を, 次のように定義する。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (6)$$

標準偏差を  $s_n$  で与え, 以下のように推定する。

$$s_n = n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{r=1}^n (x_r - \bar{x})^2} \quad (7)$$

基礎知識としての修正済レンジを求めるには, 所与の観測値からサンプル平均を差引いてデータを偏差系列に変換する。

$$z_r = (x_r - \bar{x}) ; r = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

8 式のデータ系列  $z_r$  の平均は 0 となる。次のステップは, 偏差系列のデー

タを用いて、累積時系列 (cumulative time series)  $y_r$  を作成する。すなわち、

$$y_1 = z_1 + z_r \quad ; \quad r = 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

なお、累積時系列を作成する際、平均からの偏差データを用いているため、当該系列の最後の値  $y_n$  は、 $y_n = 0$  となる点に留意してほしい。修正済レンジ (adjusted range) を  $R_n^*$  と書けば、これは次式で与えられる。

$$R_n^* = \max(y_1, y_2, \dots, y_n) - \min(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (10)$$

10式に見る  $R_n^*$  は、原系列  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に対する修正済レンジである。一方、偏差系列  $y$  はその平均が 0 になるので、系列中の最大値  $\max(y)$  は  $\max(y) \geq 0$ 、最小値  $\min(y)$  は  $\min(y) \leq 0$  となる。したがって、修正済レンジは、常に非負の値をもつことになる。ここで、簡単な数値例を、表 2 を手引きとして示す。

表 2 の第 2 欄は、月別に見た製品消費量の 1 年間の観測値を示している。このデータにより、平均消費量  $\bar{x}$ 、標準偏差  $s_n$ 、平均からの偏差系列  $z_r$  およびその累積値系列  $y$ 、さらには修正済レンジ  $R_n^*$  を導出してみる。

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{12} (6 + 8 + \dots + 18) \\ &= \frac{1}{12} \times 240 = 20 \text{ (万ケース)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{12} (x_r - \bar{x})^2 &= 6^2 + 8^2 + \dots + 18^2 - \frac{(1240)^2}{12} \\ &= 5,862 - 4,800 = 1,062 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} s_n &= 12^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1,062} = \sqrt{\frac{1,062}{12}} \\ &= 9,407 \end{aligned} \quad (13)$$

消費量の偏差系列と累積偏差の系列は、表 2 の第 3 欄と第 4 欄の載せてある。第 4 欄の数値から、 $\max(y) = 12$ 、 $\min(y) = -31$  であるから、修正済レンジ  $R_n^*$  は、

$$R_n^* = 12 - (-31) = 43 \quad (14)$$

となる。ところで、表 2 の第 4 欄で示した累積偏差の系列は、消費量の平均

表2. ある年の消費量の月次原系列, 偏差系列, 累積偏差の系列例

単位: 万ケース

月 ( $r$ )	消 費 量 ( $x$ )	消費量の偏差系列 ( $x - \bar{x}$ )	偏差系列の累計値 ( $y$ )
1	6	-14	-14
2	8	-12	-26
3	15	-5	-31
4	20	0	-31
5	20	0	-31
6	23	3	-28
7	27	7	-21
8	41	21	0
9	32	12	12
10	15	-5	7
11	15	-5	2
12	18	-2	0
合 計	240	0	—

値20 (万ケース) を基準とした場合の消費水準とみなせうる。修正済レンジは、消費水準の最高と最低の幅を示しており、これは換言すれば期間  $n$  (この場合12) におけるシステムの変動の程度を意味するのである。

## (2) スケール変換レンジ

分析の背景にある H. E. Hurst の経験則は、年間の河川の流量といった



地球物理学が取扱う時系列の観測値に係わる問題である。Hurst はダム貯水量が氾濫も涸渇も起こさない放流のあり方を研究し、貯水水準が時間の経過につれて平均水準からどのように変動するかを計測している<sup>(\*)</sup>。この変動レンジは計測期間の長さによって変化するが、所与の時系列がランダムであればレンジは期間の平方根に比例して増加するはずである。すなわち、

$$R = T^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

である。ここに、 $R$  は変動のレンジ、 $T$  はタイム・インデックスを示しており、いわゆるランダム・ウォークのプロセスを説明するブラウン運動 (brownian motion) の初歩的なモデルになっている。15 式は、 $T^{\frac{1}{2}}$  のルールとして広く知られている。

Hurst は時間に対する当該尺度を標準化するためにレンジを観測値の標準偏差で割ることにより、対比可能な無次元の尺度を作成したのである。かかる分析方法が、R/S 解析と呼ばれるものである。

ここで、参考までに R/S 解析の理解を深めるために、簡単な数値例を示した表 3 を活用する。

表 3 は同一のカテゴリーに属する 2 つのブランド A、B の 1 年間に渡る月別販売量を示したもので、両者共年間合計 144 万ケース、月平均販売量 12 万ケースと同一の値をとっているが、月間に対するデータの順位は異なっている。ブランド A では観測値 18 と 6 が交互に繰返す系列であるのに対し、ブランド B では観測値 18 と 6 が 3 回ずつ繰返されるいわば持続性のある系列になっている。

両系列の修正済レンジを  $R_A^*$ 、 $R_B^*$  とすると、前者は  $R_A^* = 6$ 、後者は  $R_B^* = 18$  となっており、明らかに同一の事象が連続して生起したブランド B の系列の方が修正済レンジは大きい。標準偏差は両系列共 6 であるから、スケール変換レンジは、前者は  $R_A^{**} = \frac{6}{6} = 1$ 、後者は  $R_B^{**} = \frac{18}{6} = 3$  となる。このことから、一般に累積偏差には、同一の事象が連続して生起すると、そのレンジは拡大するという重要な特性が見られるのである。図 1 には、ブランド A、B について時系列の累積偏差と修正済レンジのグラフを載せてある。

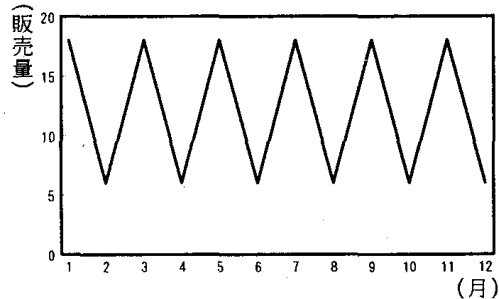
表 3. 2 種のブランド A, B についての販売量とその偏差系列及び  
累積偏差のデータ

単位：万ケース

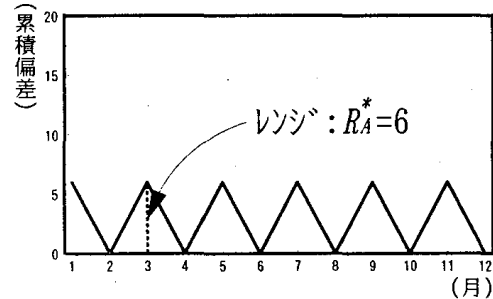
月	販 売 量		販売量の偏差系列		累積偏差の系列	
	$x^{(A)}$	$x^{(B)}$	$x^{(A)} - \bar{x}^{(A)}$	$x^{(B)} - \bar{x}^{(B)}$	$y^{(A)}$	$y^{(B)}$
1	18	18	6	6	6	6
2	6	18	-6	6	0	12
3	18	18	6	6	6	18
4	6	6	-6	-6	0	12
5	18	6	6	-6	6	6
6	6	6	-6	-6	0	0
7	18	18	6	6	6	6
8	6	18	-6	6	0	12
9	18	18	6	6	6	18
10	6	6	-6	-6	0	12
11	18	6	6	-6	6	6
12	6	6	-6	-6	0	0
合 計	144	144	0	0	$R_A^* = 6$ $R_A^{**} = 1$	$R_B^* = 18$ $R_B^{**} = 3$
平 均	12	12	0	0		
標準偏差	6	6	—	—		

【 系列 A 】

◆系列 A の原系列

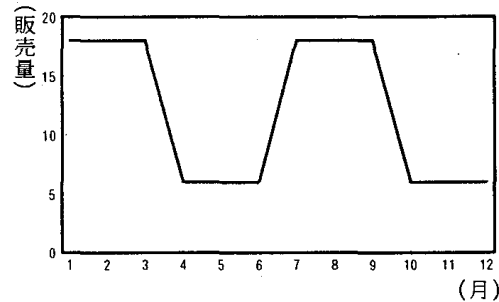


◆系列 A の累積偏差



【 系列 B 】

◆系列 B の原系列



◆系列 A の累積偏差

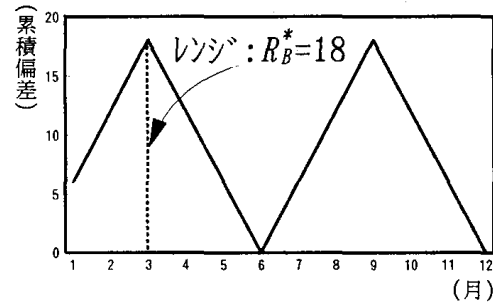


図 1. ブランド A, B における累積偏差と修正済みレンジのグラフ

前述のように、所与の時系列がランダムな場合、スケール変換レンジは期間の平方根 (0.5乗) に比例する。すなわち、分析の対象となる時系列が持続性を有するか否かは、期間に対するスケール変換レンジの勾配が0.5を越えるかどうかによって識別されることを示唆するのである。Hurstの研究は、河川の放流、気温、太陽の黒点の数といった自然現象がバイアスのあるランダム・ウォーク、換言すればノイズのあるトレンドに従うことを実証している。「トレンドの強さとノイズの水準は、時間に関してどの程度スケール変換レンジが比例するか、すなわち、ハースト指数  $H$  が0.5よりもどの程大きいかによって計測される<sup>(\*)</sup>」のである。

Hurstは、また、前述15式に関するより一般化した方程式も発見している。

すなわち、

$$R_n^{**} = cn^H \quad (16)$$

ここに、 $R_n^{**}$ は時系列  $x_1, x_2, \dots, x_N$  に対応しており、添数  $n$  はある時間期間におけるスケール変換レンジを意味する点に注意すべきである。なお、 $n$  は、 $n = 3, 4, \dots, N$  まで可変とする。 $C$  は、定数を示している。16式を対数変換し、次式を得る。

$$l_n R_n^{**} = l_n C + H(l_n n) \quad (17)$$

かくて、17式を回帰分析の問題としてOLS（通常の最小2乗法）を適用すれば、ハースト指数  $H$  は回帰係数の推定値から得られるのである。すなわち、データの配列を便宜上  $j = 1, 2, \dots, J$  とおいて、以下の正規方程式を解くことになる。

$$\begin{cases} J l_n C + H \sum_{j=1}^J l_n n = \sum_{j=1}^J l_n R_n^{**} \\ l_n C \sum_{j=1}^J l_n n + H \sum_{j=1}^J (l_n n)^2 = \sum_{j=1}^J (l_n n) (l_n R_n^{**}) \end{cases} \quad (18)$$

以上が、ハースト指数の推定法である。得られたハースト指数  $H$  が0.50よりも大ならば、前述のように、今日の出来事は明日に影響を与えることを示唆するが、それは単なる系列相関といった短期的なものではなく、まさに長期の記憶関数（long memory function）を保持していると呼称するのにふさわしいものである。

一般的に、R/S解析では、循環の長さを推定できるなら、大量のデータを整備する指針として10循環をガイドラインにという経験則が存在するように<sup>(\*)9)</sup>、そのアプローチには長期間のサンプル数が前提となっている。情報過多と云われる今日でも、企業が保有する経済時系列は、種々の市場環境を含んだ比較的短期のデータ系列しか入手できない現実を見ると、分析結果の解釈には十分な注意が肝要になるのである。

A.A. Anis と E.H. Lloyd は、小数サンプルにおけるR/S解析での系統的な誤差を避けるために、次のような方程式を提示している<sup>(\*)10)</sup>。 $R_n^{**}$ の期待値を  $E(R_n^{**})$  と書けば、

$$E(R_n^{**}) = \frac{\Gamma\{\frac{1}{2}(n-1)\}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}n)} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}}; \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

で与えられる。

ここに、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数を、 $\pi$  は円周率を示している。

当該方程式自体の特性については、本小冊子の範囲を越えるため説明を省略するが、複雑に見える19式もスターリングの関数 (Sterling's Function) を用いて次のように簡約できる。

$$E(R_n^{**}) = (n \cdot \frac{\pi}{2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (20)$$

上記20式は、観測値の数  $n$  が  $n > 300$  の場合に使用できることが知られている。R/S 解析については、基礎的な部分を述べたにすぎないが、紙面の都合もあるので理論的背景にピリオドを打って現実的な展開上のステップ、数値例、活用上の留意点などを次章で述べる。

## 2 R/S 解析の実際

これまでに述べた内容を背景として、現実の時系列観測値を入手した場合、R/S 解析を実行する際のステップ別展開をまず説明する。次いで、ビールの国内課税移出数量と国内新車登録台数の月次時系列による計測の実際、さらには解析自体の意義とマーケティング戦略立案上への示唆などを取りあげる。

### 2-1 R/S 解析上のステップ

R/S 解析の実行可能な展開方法として、E. E. Peters は以下の 8 ステップをあげている (\*11)。当該ステップは、きわめて簡便であり実務家向けに作成されている。

(1) 長さ  $M$  の売上高や生産量などの時系列観測値を用意し、これを  $N = M -$

1 の対数比系列に変換する。

$$N_i = l_n \left[ \frac{M_i + 1}{M_i} \right]; i = 1, 2, \dots, M-1 \quad (21)$$

(2) 対数比系列の観測値の数を  $N$ ，スケーリングのためのタイム・スパンを  $n$  として，系列分割数  $A$  を導出する。

$$A = \frac{N}{n} \quad (22)$$

ただし，小数点以下は切り捨ててよい。

(3) 分割された各系列  $L_a$  での対数比データ  $N_{ka}$  を用いて，平均値  $\bar{x}_a$  を導出する。

$$\bar{x}_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{ka} \quad (23)$$

ただし， $k = 1, 2, \dots, n$ ， $a = 1, 2, \dots, A$  である。

(4) 分割された各系列に対して累積偏差  $x_{ka}$  を導出する。

$$x_{ka} = \sum_{i=1}^k (N_{ia} - \bar{x}_a) \quad (24)$$

ただし， $k = 1, 2, \dots, n$ ， $a = 1, 2, \dots, A$  である。

(5) 分割された各系列における累積偏差のレンジ  $R_{La}$  を求める。

$$R_{La} = \max(x_{ka}) - \min(x_{ka}) \quad (25)$$

ただし， $k$  は  $1 \leq k \leq n$  である。

(6) 各分割系列  $L_a$  での標準偏差  $S_{La}$  を求める。

$$S_{La} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{(N_{ka} - \bar{x}_a)^2} \quad (26)$$

(7) 分割された各系列  $L_a$  における累積偏差のレンジ  $R_{La}$  を系列分割数  $A$  により平均し，タイム・スパン  $n$  でのスケール変換レンジ  $R_n^{**}$  を算出する。

$$R_n^{**} = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \left( \frac{R_{La}}{S_{La}} \right) \quad (27)$$

(8) これまでのステップを  $n = \frac{M-1}{2}$  まで繰返し，前述の17式を適用するためのベース・データを得る。具体的には，スケール変換レンジ  $R_n^{**}$  の対数を

目的変数, タイム・スパン  $n$  の対数を説明変数とする回帰分析から, ハースト指数  $H$  が推定されるものである。

以上のステップを要約して, 図 2 に載せてある。

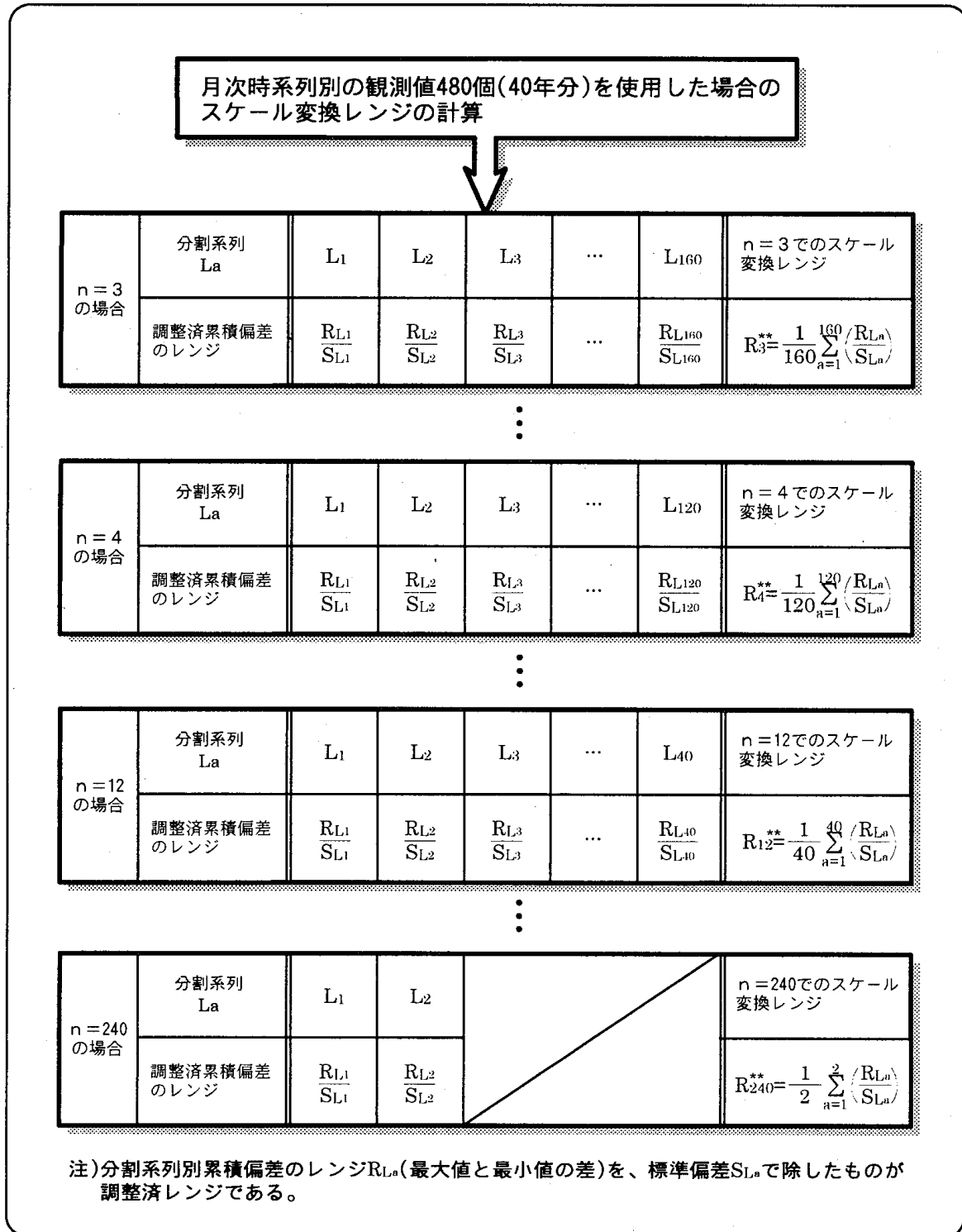


図 2. 対数比系列での観測値数480を例とした分割系列別スケール変換レンジ導出図

## 2-2 R/S解析の数値例

本節では、R/S解析の実施例を中心に結果の解釈、アプローチ上の留意点、マーケティング・アクションへの示唆などを述べる。なお、結果の解釈には、市場動向に対する洞察力を必要とする点に注意を要する。

### (1) ビール国内課税移出数量のR/S解析

ビールを含む酒類は生産され流通過程に入る最初の時点で課税の対象となるが、かかるビールの出荷量が課税移出数量と呼ばれるものである。第一のR/S解析は、1953年3月より1996年5月までの月次課税移出数量を用いたアプローチで、データの出所は国税庁課税部酒税課によるものである。観測値の数は、全体で519個になっている。月次データは、ビールの移出数量に限らず多くの経済時系列に関して入手できる可能性は高いので、市場動向の分析には適しているといえよう。解析上のデータは、前述のように、課税移出数量 $Q_t$  ( $t$ は時点)の対前月比の対数 $\ln\left(\frac{Q_t}{Q_{t-1}}\right)$ という518個の変換データである。当該分析では種々の時間の増分 (increments of time)  $n$  に対して、前述の23式と24式を適用する。われわれの場合、出発点として $n=3$  (3ヶ月の増分)を採用するので、対数変換系列を172個 $\left(\frac{518}{3}=172.667\right.$ , 小数点以下切り捨て)の3ヶ月の増分に分割することにより、期間3ヶ月毎のレンジをまずスケール変換しなければならない。かくて、172個の観測値で平均すれば、 $n=3$ でのスケール変換レンジを得る。このような操作を $n=4, 5, 6, \dots, 259$ に対して実施する。 $n$ の数が増加するにつれ、平均値を作成する際の観測値の個数が減少するためスケール変換レンジの安定性が低下する点に留意しなければならない。得られたスケール変換レンジ $R_n^{**}$ から、ハースト指数導出までの手続きは、当該レンジの対数 $(\ln R_n^{**})$ とタイム・スパン $n$ の対数 $(\ln n)$ との回帰分析に帰着する。ビール課税移出数量の場合の計測結果は、表4に載せてある。

表4では、タイム・スパン $n$ 、ハースト指数 $H$ 、フラクタル次元 $\alpha$ 、相関の程度 $C$ 、回帰分析におけるモデルの適合度 (自由度未修正の重決定係数) $R^2$ を載せてある。また、図3、図4、図5には、原系列、タイム・スパン



表 4. わが国のビール課税移出数量の R/S 解析

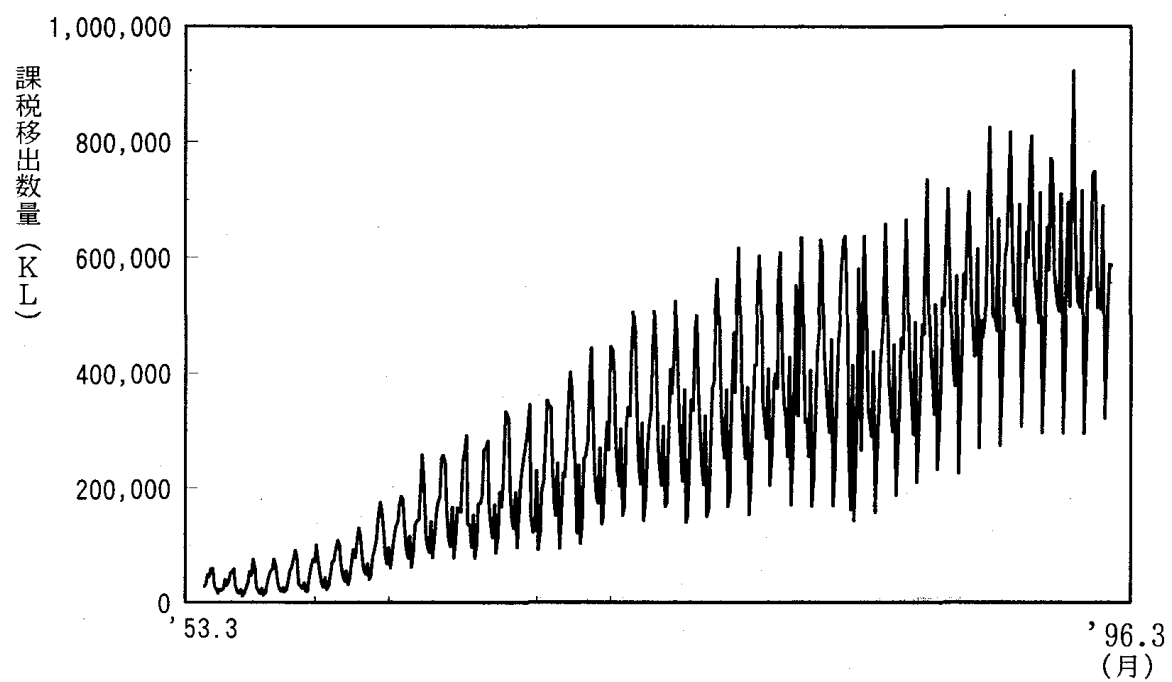
時間の増分(n)	ハースト指数(H)	フラクタル次元(D)	相関の程度(D)	重決定係数(R <sup>2</sup> )
5	0.648	1.543	0.228	0.999
6	0.611	1.635	0.167	0.995
7	0.604	1.656	0.155	0.997
8	0.619	1.615	0.180	0.996
9	0.666	1.501	0.259	0.983
10	0.656	1.524	0.242	0.986
11	0.672	1.489	0.269	0.987
12	0.677	1.478	0.278	0.990
13	0.689	1.452	0.299	0.990
14	0.697	1.434	0.315	0.991
15	0.684	1.461	0.291	0.989
16	0.687	1.456	0.296	0.991
17	0.677	1.476	0.279	0.990
18	0.644	1.552	0.221	0.967
19	0.629	1.589	0.197	0.964
20	0.612	1.634	0.168	0.957
21	0.588	1.701	0.130	0.941
22	0.569	1.756	0.101	0.931
23	0.550	1.817	0.072	0.919
24	0.528	1.892	0.040	0.900
25	0.516	1.939	0.022	0.895
26	0.508	1.968	0.011	0.896
27	0.495	2.020	-0.007	0.889
28	0.493	2.027	-0.009	0.894
29	0.490	2.041	-0.014	0.898
30	0.473	2.115	-0.037	0.878
31	0.468	2.137	-0.043	0.880
32	0.462	2.163	-0.051	0.881

(注) 時間の増分が n=33以降は、そのアウトプットを省略してある。

とスケール変換レンジ、タイム・スパンとハースト指数の推移をそれぞれ描写してある。

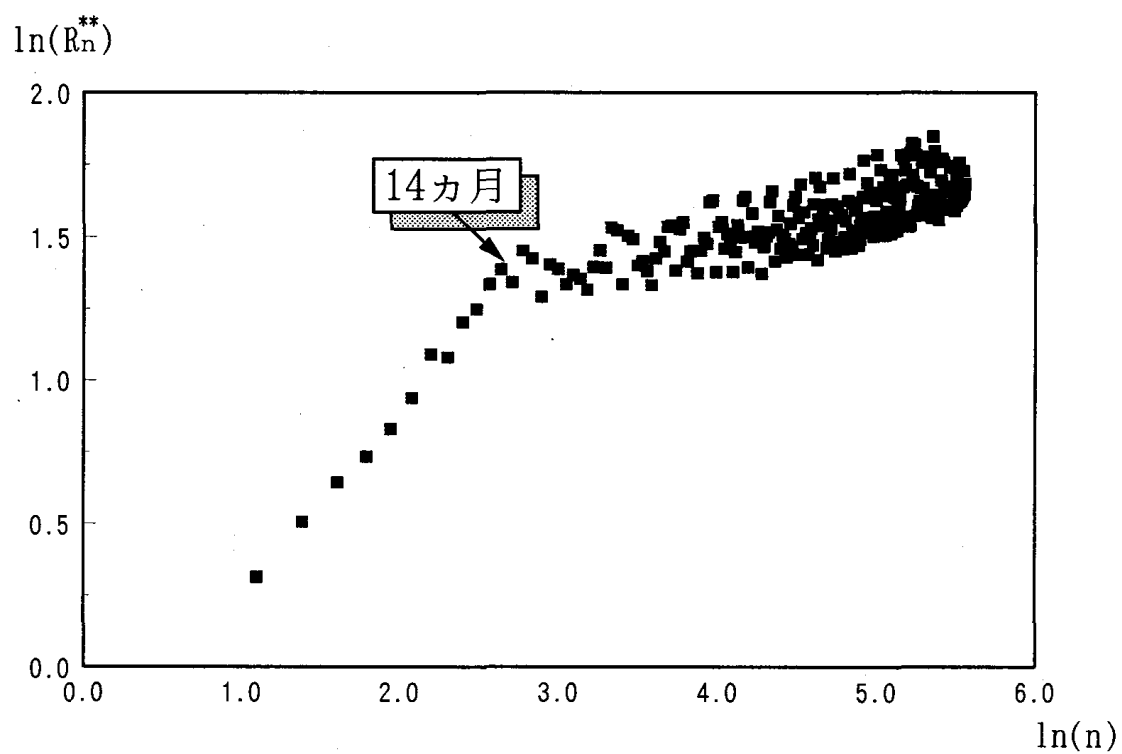
計測結果から、次の知見が得られる。

- ① 課税移出数量の長期の記憶過程は、26ヶ月（2年と2ヶ月）未満のタイム・スパンに作用している。



(注)資料出所：国税庁課税移出部酒税課

図3．R/S解析に用いたビール課税移出数量の推移



分析期間：1953年3月～1996年5月

図4．タイム・スパンとスケール変換レンジ（ビール課税移出数量）

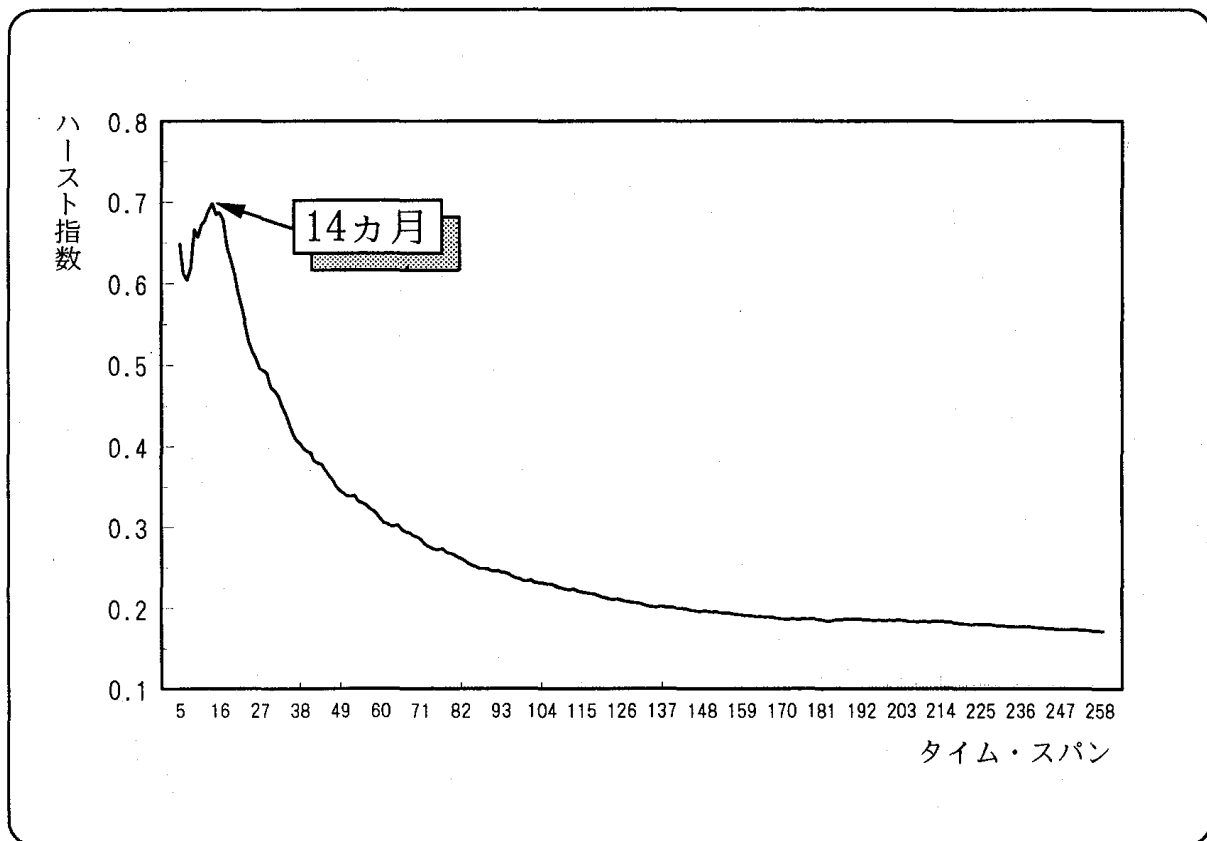


図5. タイム・スパンとハースト指数の推移（ビール課税移出数量）

- ② ピーク時のハースト指数はタイム・スパン14ヶ月の $H=0.697$ で、当該時系列はフラクタルになっている。したがって、ビール国内市場の成長性には、トレンド補強的な持続性のある動きが見られるといえよう。
- ③ ハースト指数は26ヶ月というタイム・スパンで $H=0.508$ と最小の値を呈しており、長期的記憶がほぼ消滅することがわかる。ちなみに、現在が明日に影響を与える程度は、 $C=0.011$ と相関性のない状態を示している。
- ④ したがって、計測の範囲内では、循環の長さは平均26ヶ月となっており、非線形動学的に云えば初期条件の記憶はほぼ26ヶ月後に失われることを示唆している。

## (2) 国内乗用車の新車登録台数に関する R/S 解析

第二の数値例は、1968年1月から1996年7月までの社団法人日本自動車工

表 5 . 国内乗用車新車登録台数の R/S 解析

時間の増分(n)	ハースト指数(H)	フラクタル次元(D)	相関の程度(D)	重決定係数(R <sup>2</sup> )
5	0.745	1.342	0.405	0.986
6	0.821	1.218	0.561	0.984
7	0.655	1.526	0.240	0.873
8	0.593	1.688	0.137	0.877
9	0.545	1.836	0.064	0.877
10	0.533	1.878	0.046	0.901
11	0.483	2.069	-0.023	0.870
12	0.445	2.250	-0.074	0.846
13	0.439	2.278	-0.081	0.867
14	0.437	2.291	-0.084	0.884
15	0.424	2.360	-0.100	0.889
16	0.410	2.439	-0.117	0.889
17	0.396	2.525	-0.134	0.886
18	0.404	2.474	-0.124	0.898
19	0.382	2.617	-0.151	0.872
20	0.375	2.664	-0.159	0.876
21	0.368	2.717	-0.167	0.879
22	0.359	2.782	-0.177	0.878
23	0.351	2.851	-0.187	0.875
24	0.333	3.002	-0.207	0.844
25	0.334	2.998	-0.206	0.854
26	0.335	2.982	-0.204	0.864
27	0.329	3.041	-0.211	0.863
28	0.322	3.104	-0.218	0.860
29	0.318	3.145	-0.223	0.862
30	0.326	3.069	-0.215	0.866
31	0.319	3.139	-0.222	0.860
32	0.316	3.168	-0.226	0.863

(注) 時間の増分が n=33以降は、そのアウトプットを省略してある。

業会による新車登録台数（シャシー・ベース）でのアプローチを取りあげる。ただし、当該データには、普通車、小型四輪車、軽四輪車の車種別合計、すなわち、新車登録と届出台数の合計を採用し、それを観測値の原系列とする。全観測値の数は343個で、28年と7ヶ月間のデータになっている。アプローチの実際は、国内ビール課税移出数量の場合と同様に、月次原系列の対前月

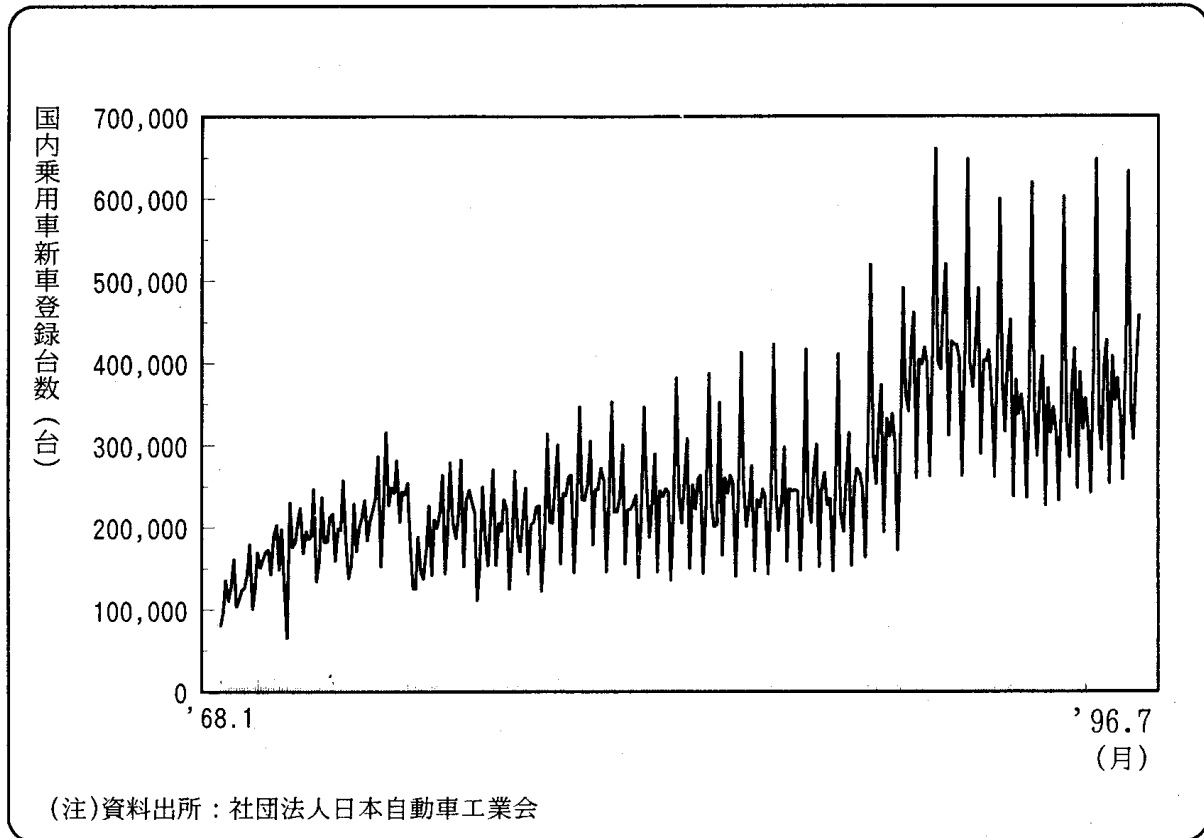


図 6 . R/S 解析に用いた国内乗用車新車登録台数の推移

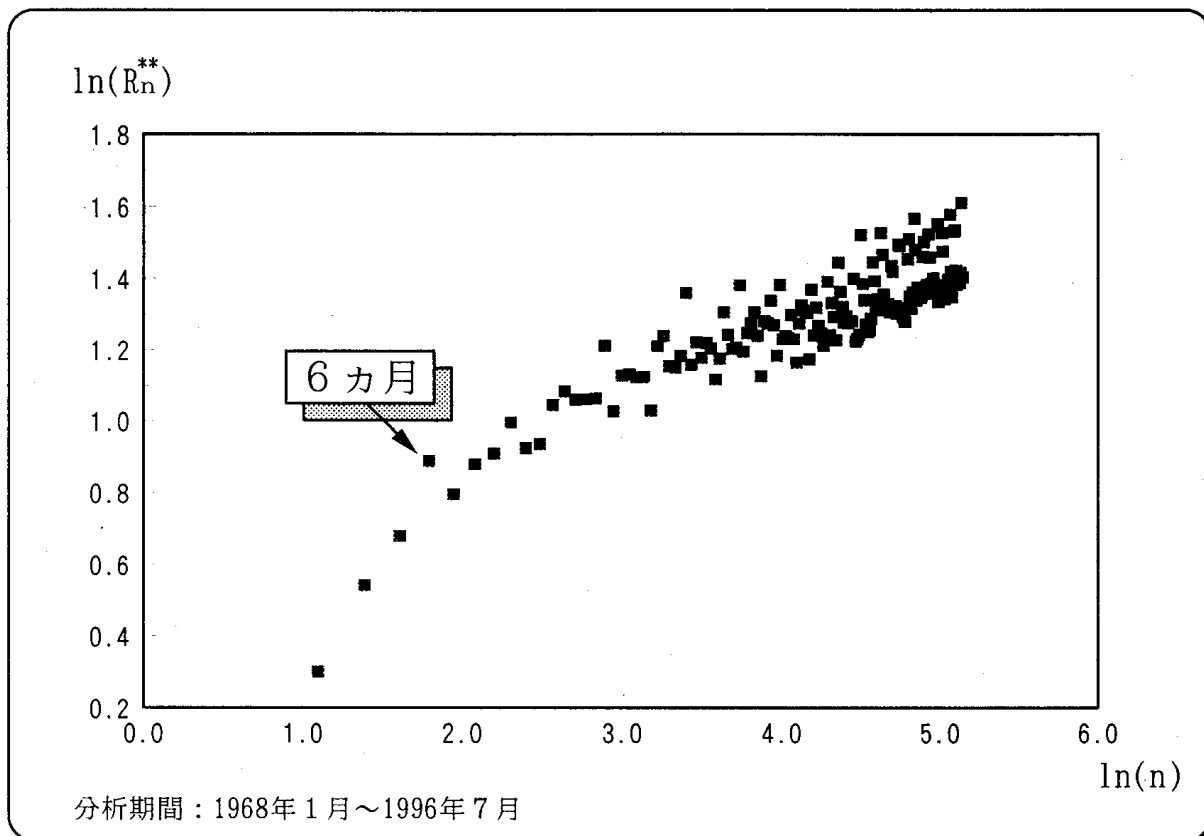


図 7 . タイム・スパンとスケール変換レンジ (国内乗用車の新車登録台数)

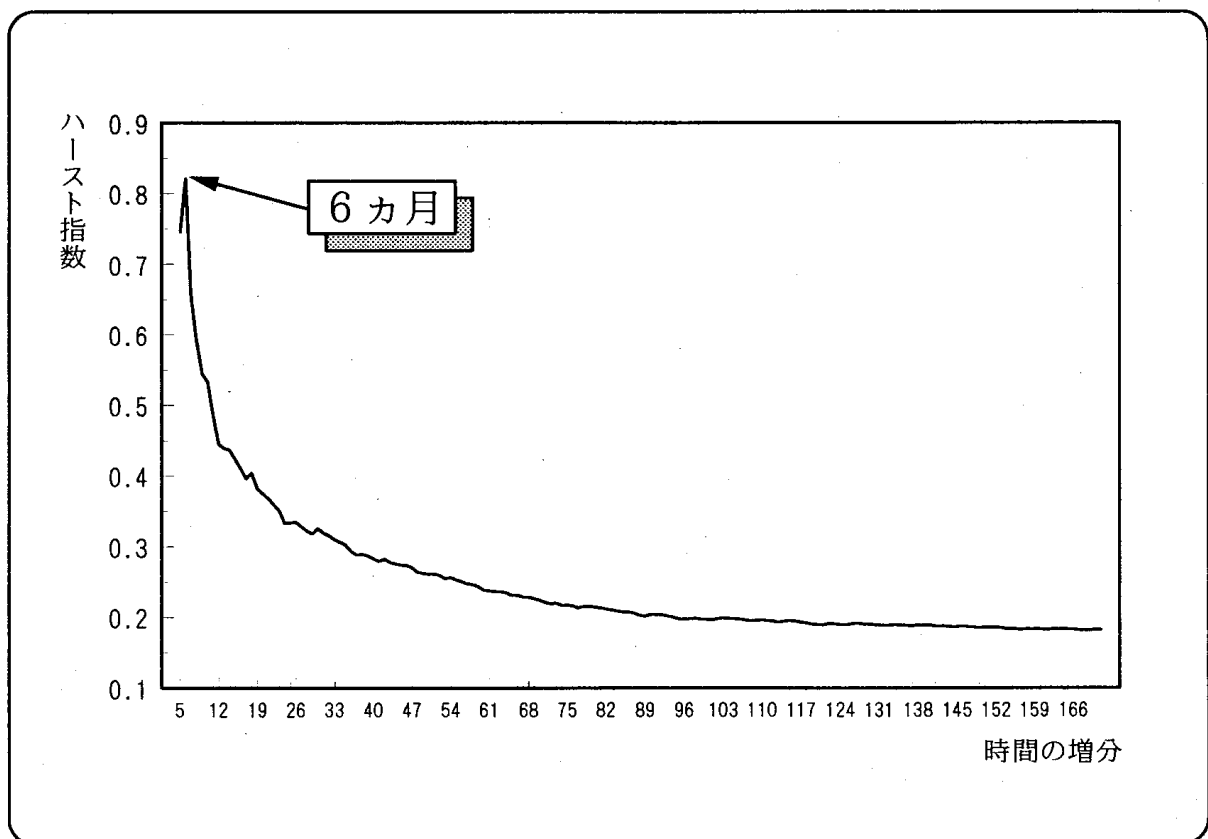


図8．タイム・スパンとハースト指数の推移（国内乗用車の新車登録台数）

比の対数を解析用データとして使用する。計測結果は表5に、原系列、タイム・スパンとスケール変換レンジ、タイム・スパンとハースト指数をそれぞれ図6、図7、図8に載せてある。

解析結果より、次の事実が読みとれる。

- ① 国内乗用車の新車販売台数に関する変化量の R/S 解析の結果は、予想通り当該時系列が長期の記憶過程をもつフラクタル系列であることを示唆する。意外な点は、時間の増分が10ヶ月でハースト指数  $H$  が0.533に達する事実である。このとき、相関の程度  $C$  はわずか0.046となっている。
- ② ハースト指数は、6ヶ月で  $H = 0.821$  と最高の値を取っている。 $H$  が0.821と大きな値をもつことは、 $H$  が小さい場合と比較して、ノイズが少なく、より持続性があり、明白なトレンドがあることを意味する。
- ③ わが国の乗用車市場は従来よりメーカー別の車種も多く、加えて市場競

争との兼合いから車種のモデル・チェンジが激しいという事実が見られる。このような事実を勘案すると、販売の成長性に関する長期記憶効果が10ヶ月と短いことも頷けよう。

### 2-3 R/S 解析に対する信頼性

企業のマーケティング活動に関連する市場について、R/S 解析を実施する場合、最も困難な問題は観測値系列の長さであろう。われわれは観測値系列に内在する長期の記憶過程を取扱う関係上、より長期の循環を必要とする。したがって、観測値系列の長さに注意し、データベースへの観測値の定常的な追加投入はもとよりのこと、過去の観測値を一定のタイム・スパンで一律除去するといった行為はつつしむべきであろう。

観測値系列の短さが原因となって、R/S 解析の結果の信頼性が疑わしい場合もありうる。この点は、経済や市場のデータを取扱う際に重要となる。E.E. Peters は、結果の信頼性を検証する方法としてスクランブル・テスト (scramble test) の実施をすすめている<sup>(\*)12)</sup>。この方法は、単に観測値の順序をランダムに入れ換えて時系列の順序と異なる配置を作り、改めて R/S 解析を行って通常の結果と比較することから解析の信頼性を判断するものである。

所与の時系列に長期の記憶効果が存在する場合、データの時系列的順序は重要な意味をもつが、観測値のランダムな配置替はいわばシステム構造の破壊を意図的に行うことに等しい。例えば、元の系列からのハースト指数が  $H=0.861$  で、スクランブル後のそれが  $H=0.510$  であれば、ハースト指数の差異はランダム化による長期記憶過程が破壊された結果とみなしうるであろう。スクランブルが、観測値を独立に導いたのである。R/S 解析におけるスクランブル・テストは操作も簡単なことから、分析担当者の実行が望まれる。

### 3 R/S解析の有効活用

フラクタルとカオス理論は、われわれが複雑な市場動向を理解するのに役立つモデル・アプローチに大きな変化を与えている。きわめてシンプルな定量的分析へのアイディアでさえも、ここ300年間に開発された統計的、経済的ツールの活用に関して、そのほとんどが実用に耐えられない状態を呈していると云われる<sup>(\*13)</sup>。これまでに述べたR/S解析は、フラクタルやカオス理論を基礎とした実用面での新しさをもつツールで、すでに資本市場の分析において開花しつつある。この成果を企業の販売予測の領域に応用することこそ、われわれの主たる狙いである。本章では、その意図をくんで若干の有効活用への切り口を提示する。

















#### 3-1 市場動向のパターン認識

市場における種々な出来事は時間が経過すれば忘れられてしまうが、その出来事がもたらす影響はそれとは無関係に持続する可能性は高い。かかる影響の持続性は、小石を池に投げたときに生ずる波紋の現われ方に例えられよう。これまでの市場動向分析に見られる計量的接近は、主として短期の記憶と忘却を仮定している。しかしながら、現実の複雑性に富む市場においては、未来が不透明なほど過去への依存度は高くなり、特に長期的記憶過程のダイナミックな影響が革新をもたらし、歴史の流れを変えてしまう可能性もありうる。われわれがフラクタルやカオスに注目する一つの理由は、市場全体や企業の売上高時系列そのものが長期的記憶過程として特徴づけられるからである。特定の製品需要の長期的変遷を集約して得られるハースト指数を、時間の増分との経緯から捉えた場合、観測値が無相関（記憶の消滅）になるまでの時間の長さとして時系列の周期を把握できることはすでに述べた通りである。

上記のような時系列の周期は、一般的に平均周期軌道（mean orbital period）と呼ばれるが、この情報の活用を考える。戦略性を加味したプラン



表 6 . 自社製品トレンドと市場トレンドによる状態マトリックス

行	列	市 場	
		トレンド上昇	トレンド下降
自 社 製 品	トレンド上昇	【相対的に記憶が長い】	
		$\langle a_{11} : \text{波乗り型} \rangle$  好調路線	$\langle a_{12} : \text{持 続 型} \rangle$  記憶のパワー
			
		【相対的に記憶が短い】	
		$\langle a_{21} : \text{隠れ蓑型} \rangle$  利用価値	$\langle a_{22} : \text{頭打ち型} \rangle$  方向転換
			
	トレンド下降	【相対的に記憶が長い】	
		$\langle a_{31} : \text{自 爆 型} \rangle$  停止時期	$\langle a_{32} : \text{道連れ型} \rangle$  危険性の度合い
			
		【相対的に記憶が短い】	
		$\langle a_{41} : \text{孤 立 型} \rangle$  ニッチ志向	$\langle a_{42} : \text{打止め型} \rangle$  見切り状態
			

注1)記憶の長短を示す相対的な長さは、自社製品と市場との比較に基づく。

注2)表中に見る  印は市場トレンド、 印は自社製品トレンドをそれぞれ示す。

ニング問題に R/S 解析を極力有効に機能させるには、記憶の長短を媒介とした自社製品のトレンドと市場トレンドの状態を組合わせたマトリックスの作成が意味もつ、表 6 は、当該マトリックスを表現しているが、これは記憶の相対的な長さが種々な戦略を創発する可能性が高いことに着目したものである。

上記の  $4 \times 2$  のマトリックスから、各要素における製品戦略の創発をある程度予測することができる。すなわち、全体で 8 種の要素が存在するが、それぞれは可能性のある創発戦略のパターンを示している。すなわち、便宜上  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4 ; j = 1, 2$ ) で各要素を表現すれば、パターンの特徴を表わすキー・ワードは次のようになる。

$a_{11}$  : 波乗り型で、好調路線を示唆する。

- $a_{12}$  : 持続型で、記憶パワーを示唆する。
- $a_{21}$  : 隠れ衰型で、利用価値を示唆する。
- $a_{22}$  : 頭打ち型で、方向転換を示唆する。
- $a_{31}$  : 自爆型で、停止の時期を示唆する。
- $a_{32}$  : 道連れ型で、危険性の度合いを示唆する。
- $a_{41}$  : 孤立型で、ニッチ思考を示唆する。
- $a_{42}$  : 打止め型で、見切りを示唆する。

例えば、 $a_{11}$  の波乗り型のパターンは自社製品にとって最も望ましい状態を、 $a_{42}$  は  $a_{11}$  とは対極の関係で製品廃棄を暗示する状態といった定性的ではあるが現象の背後にひそむ創発の種を発見できるであろう。データ系列の短さの点では結果の解釈に注意を要するが、ブランド戦略の見直しにも当該アプローチは意思決定者に新しい視点を提供するはずである。

非線形性を伴う市場動向を分析し、自社の市場機会を見直すためには状況に即した評価の視点を必要とする。本小冊で取りあげた R/S 解析は、競争の優位性や製品と市場の優先順位を客観的かつ多面的に評価し、現在の製品および市場領域のどの範囲に力をそそぐべきかの指針と、戦略創発への切っ掛けを与えてくれるのである。

### 3-2 短期予測への掛橋

R/S 解析の第 2 の活用として、非線形性を考慮した需要予測や販売予測モデルを構築する場合、その特定化に必要な情報を提供できる点を指摘したい。具体的には、非線形モデルによる短期予測に見るように、売上高のような 1 種類の時系列データから別の方向に関する情報をつくり上げるといった、いわばアトラクターの相空間を再構築する方法がアプローチの出発点になっている。例えば、アトラクターの 3 次元空間像を描写する場合、あたかも「建築家が建物の 3 次元の形をその平面図、正面図、および側面図で表わすのと同じである。諸君が 3 次元アトラクターを再構築するためには、三種の異なった方向からの情報が必要となるのである。」<sup>(\*)14)</sup> われわれは、D.

Ruelle (\*15) が開発し N. Packard ら (\*16) が実用化した一つの観測値のラグ系列を使って他の次元を満たすという数学的には手際のよい方法を採用したい。このとき、R/S 解析から得られる平均周期軌道の情報は、販売予測や需要予測への橋渡しの役割を演じてくれよう。具体的には、前述のように、1 変量の時系列よりタイムラグをもつ変移時系列を作成し、それらの描く軌跡を多次元空間内に埋込むことでアトラクターが再構築できれば、短期予測への貴重な事前情報が得られることになる。われわれが対象とする長期的記憶をもつ系列は、その系列の次元よりも埋込み次元の方が大きい限り、固体のように相互に結びつき、認定した次元の大きさに関係なくその形態を保持するであろう。アトラクターの再構築において、真の次元よりも高い次元を設定する限り、次元は問題にならないわけである。

タイムラグの問題に関しては、A. Wolf らの研究成果 (\*17) が貴重なヒントを提供してくる。タイムラグを  $t$ 、埋込み次元を  $m$ 、平均周期軌道を  $Q$  とすれば、

$$t = \frac{Q}{m} \quad (28)$$

という関係が成立する。すなわち、タイムラグは平均周期軌道と埋込み次元の比を示しており、より高次の次元においても周期軌道が変化しないことを示唆する。例えば、周期軌道が48反復であれば、平面上では2期のタイムラグのある24反復が使用できるし、3次元空間では3期のラグをもつ16反復が分析に採用されよう。

残された問題は周期軌道の把握であるが、R/S 解析は観測値が無相関になるまでの時間の長さ（タイム・スパン）として時系列の周期を推定する。この結果が、平均周期軌道として有効に機能するであろう。以上のように、R/S 解析自体は、非線形性を加味した企業の予測問題とも有機的に結びつく可能性をもつものである。R/S 解析はいまだ発展途上にあるアプローチであり、今後の成果が期待できる研究領域といえよう。

### 3-3 フラクタル次元

最後に、これまでの文脈に登場したフラクタル次元についても簡単な説明を加えておく、われわれはフラクタルな図形を考察するとき、そこにフラクタル次元を定義することができる。最近では、この用語も一般化されており直線はフラクタル次元が1であり、雪の結晶のような図形では約1.46、ミツバチの飛跡に見える図形では2といった表現が眼につく、通常、次元とは物体が空間を満たす仕方を質的に記述する数を指すが、フラクタルな図形では複雑な凹凸と、多くの場合不連続性をもつため非整数の次元となる。先の例で、フラクタル次元が1.46といった記述は、当該図形が1次元の直線よりは複雑であるが、平面よりは単純であることを示している。また、ミツバチの飛跡に見える図形のフラクタル次元が2という意味は、究極的にミツバチが平面上を埋め尽くすことを示唆している。参考までに、フラクタル図形の典型的な特性を要約すると、次のようになる。

- ① 特徴的な長さをもたない。〔図形の複雑性〕
- ② 多数の凹凸による細かい構造である。〔微分不可能性〕
- ③ 入れ子構造である。〔自己相似性〕
- ④ 非整数次元をもつ。〔フラクタル次元の所有〕

いま、 $\frac{1}{m}$ に縮小した $n$ 個の自己相似図形から全体が構成されているとき、当該図形のフラクタル次元 $D$ は、

$$\begin{aligned} D &= \log_m n \\ &= \frac{\log n}{\log m} \end{aligned} \quad (29)$$

で与えられる。例えば、 $\frac{1}{3}$ に縮小した4個の相似形から全体が構成されていれば、その次元 $D$ は、

$$\begin{aligned} D &= \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{1.386294}{1.098612} \\ &= 1.262 \end{aligned} \quad (30)$$

となり、非整数の次元をもつことがわかる。フラクタル次元は、その数値が

大きい程図形が複雑であることを意味し、それはまた、われわれのナイーヴな次元感覚を拡張したものであると云えるかもしれない。

フラクタル次元は、図形のみならず時系列の観測値がどのように空間を満たしているかを明示する。時系列のフラクタル次元は1と2の間の数値をとるが、その理由は扱っている変数が一つだからである。相空間のフラクタル次元は、時系列のそれとは若干異なっている。フラクタル次元は、基礎になっているシステムについて、最少の動学変数を示唆するという重要な役割をもっている。E.E. Peters は、1959年1月から1990年2月までのわが国の株価指数に関する動学的分析から、フラクタル次元3.05という結果を公表している<sup>(\*19)</sup>。フラクタル次元が3.05であることは、動学変数が4個必要になることを意味し、株式市場の複雑性がうかがえる。フラクタル次元の推定に最も多く利用される方法として、P. Grassberger と I. Procaccia による相関積分 (correlation integral) を用いた相関次元 (correlation dimension) が有効な尺度として広く活用されている<sup>(\*20)</sup>。相関積分は、次のように定義されている。

$$C_m(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - |x_i - x_j|) \quad (31)$$

ここに、 $H(\cdot)$  は、ヘビサイド関数 (Heviside function) で、

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (r - |x_i - x_j| \geq 0) \\ 0 & (r - |x_i - x_j| < 0) \end{cases} \quad (32)$$

である。また、 $N$  は観測値の数、 $r$  は距離、 $C_m$  は次元  $m$  の相関積分である。相関積分は、任意に選択した2点が  $r$  単位まで離れていない確率を意味する。小さい距離から出発して、 $r$  の値を大きくしていくと、 $C_m$  は  $r^D$  の割合で増加するため、 $k$  を比例定数とすると次式が成立する。

$$C_m = k r^D \quad (33)$$

ここに、 $D$  は相関次元で、フラクタル次元の推定値である。33式の両辺の対数をとって、次式を得る。

$$\ln(C_m)_i = \ln k + D (\ln r_i) \quad (34)$$

34式より、回帰係数の推定値 $\hat{D}$ が相関次元を与えてくれる。埋込み次元 $m$ を $m=2$ より出発し順次大きくしていくと、最終的に $D$ はその真値に収束することが知られている。GrassbergerとProcacciaは、「この新しい尺度は、単一の時系列観測値からその特性を決定する実践的なアルゴリズムを提供するように作られている。」<sup>(\*)21)</sup>と述べているように、フラクタル次元の推定にとって有効なアプローチといえよう。

最後に、相関次元の計測例として、前述のわが国におけるビールの課税移出数量に関する対数比系列でのアプローチ結果にふれておく。

図9は、ビールの課税移出数量についての相関積分を図示したものである。このグラフは、埋込み次元が2の場合における $C_m$ と $r$ の両対数図になっている。

埋込み次元2における相関積分 $C_m$ と距離 $r$ は表7に載せてあるが、これらのデータを34式にフィットさせると次の結果が得られる。

$$l_n(C_m)_i = -3.91370 + 1.43828 l_n r_i \quad (35)$$

(0.04323) (0.05791)

モデルの標準誤差 $s$ は $s=0.15355$ 、自由度修正済重決定係数 $\bar{R}^2$ は $\bar{R}^2=0.98089$ 、 $F$ 統計量は $F=616.81128$ である。

なお、35式の右辺の括弧内は定数項と回帰係数の標準誤差を示している。回帰係数の推定値 $\hat{D}$ は $\hat{D}=1.438$ であるから、この値がフラクタル次元の推定値となっている。また、 $\hat{D}=1.438$ という値は、結果的にR/S解析で示した時間の増分が14ヶ月の、いわゆるハースト指数が最大値を取ったときのフラクタル次元1.434に近似している。 $\hat{D}=1.438$ が信頼しうる推定値なら、わが国のビール市場の成長性について2変数で動学モデルが構築可能となるかもしれない。

以上述べたアプローチは、動学的な観測値の時系列が一つしかない場合に、フラクタル次元を推定するための実践的な方法を提供してくれるのである。要約すれば、相関次元は、一連の観測値のアトラクターが状態空間を埋めつくす程度を示す尺度であり、この値が1を越えた非整数を取ったとき、デー

表 7. 埋込み次元 2 の場合の相関積分と距離

データ No.	相関積分 $C_m(r)$	距離 $r$
1	0.00277	0.20051
2	0.00483	0.40102
3	0.00797	0.60154
4	0.01208	0.80205
5	0.01737	1.00256
6	0.02387	1.20307
7	0.03137	1.40358
8	0.03965	1.60410
9	0.04843	1.80461
10	0.05758	2.00512
11	0.06768	2.20563
12	0.07825	2.40614
13	0.08929	2.60666

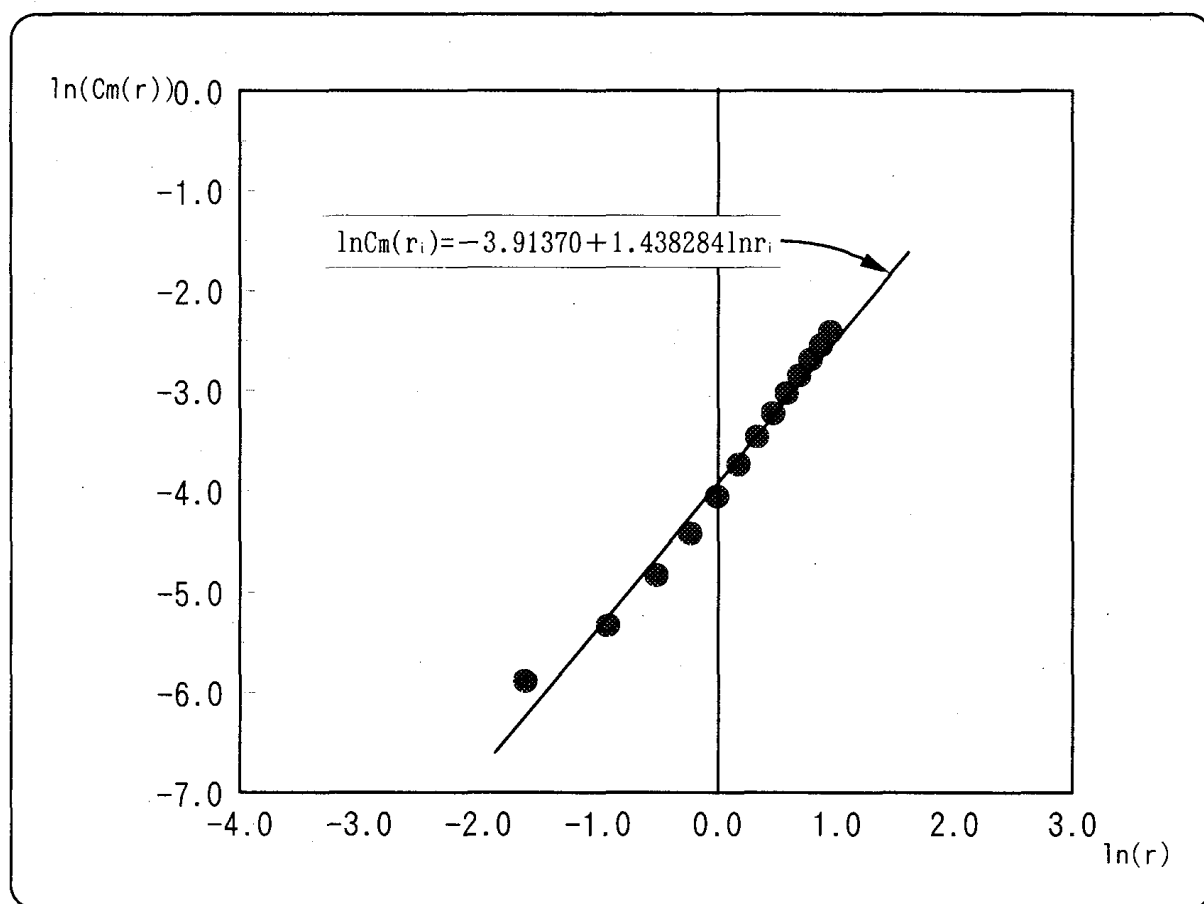


図 9. ビール課税移出数量についての距離  $r$  と相関積分の両対数図  
(埋込み次元 2 の場合)

タの背後にカオスが存在している可能性を強く示唆するのである。換言すれば、相関次元は埋込み次元の関数であり、ノイズからカオスを識別する貴重なツールとなっている。

## 結語：

ここで取りあげた定量的アプローチは、長期間に渡る時系列の観測値を用いたカオス問題攻略の第一歩を示す狙いをもつものである。アプローチの焦点は、時系列に内在する長期の記憶過程を取扱う点にあり、その尺度がH.E. Hurstの創見によるハースト指数である。ハースト指数は市場動向の統計的現象の背景に隠されている長期の依存性や持続性を識別するのに便利な尺度で、資本市場のみならず企業のマーケティング活動が対象とする種々の市場に対する新しい分析視点を提供する。要約すれば、当該尺度を用いることにより、情報が所与の時系列に及ぼす影響を把握できるのである。われわれにとって特に興味を引くアウトプットは、ハースト指数 $H$ が $0.50 < H \leq 1.00$ の範囲の値を取る、いわば長期の記憶過程の存在を示唆する場合であろう。かかるプロセスは、情報が長期間に渡って市場動向に影響を与え続けることを意味する。この事実を検証するために、わが国のビール市場と乗用車市場を題材に計測を取りあげたが、結果は事前の予想通りフラクタルな性質をもつ複雑な長期の記憶をもつことの示唆が得られている。分析を一步進めると、時系列からのフラクタル次元を決定するのに役立つ相関次元の導出法にもふれている。われわれが手にする時系列が肉眼上はカオス的に見えても、はたして真にそう云い得るかを識別する方法を提示するのが狙いである。以上の内容は、先が不可視な市場動向を捉えるための一里塚にすぎないが、市場の複雑性への切り口には避けて通れぬアプローチと云えるであろう。



## 引用・参考文献

- (\* 1) E.E. Peters (1991), “*Chaos And Order in the Capital Markets — A New View of Cycles, Princes, and Market Volatility*”, John Wiley & Sons, Inc., 新田功訳 (1994), 「カオスと資本市場 — 資本市場分析の新視点」, 白秘書房。
- (\* 2) E.E. Peters (1991), Ibid, p.204, 新田功訳 (1994), 前掲書, p.237。
- (\* 3) E.E. Peters (1991), Ibid, p.64, 新田功訳 (1994), 前掲書, p.80。
- (\* 4) E.E. Peters (1994), “*Fractal Market Analysis — Applying Chaos Theory to Investment & Economics*”, John Wiley & Sons, Inc. p.61.
- (\* 5) B.B. Mandelbrot (1977), “*The Fractal Geometry of Nature*”, W.H. Freeman and Company, 広中平祐監訳, 広中教育研究所湧源クラブ訳 (1985), 「フラクタル幾何学」, 日経サイエンス社, p.249。
- (\* 6) B.B. Mandelbrot (1972), “*Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis*”, Annals of Economic and Social Measurement 1.
- (\* 7) H.E. Hurst (1951), “*Long-term storage capacity of reservoirs*”, Trans. of, the American Society of Civil Engineers 116. pp.770–808.
- (\* 8) E.E. Peters (1994), op.cit., p.56.
- (\* 9) E.E. Peters (1991), op.cit., p.174, 新田功訳 (1994), 前掲書, p.208。
- (\* 10) A.A. Anis and E.H. Lloyd (1976), “*The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands*”, Biometrika, 63, pp.114–115.
- (\* 11) E.E. Peters (1994), op.cit., pp.62–63.
- (\* 12) E.E. Peters (1991), op.cit, pp.75–76, 新田功訳 (1994), 前掲書, pp. 93–94。
- (\* 13) R.J. Korsan (1993), “*Fractals and Time Series Analysis*”, The Mathematica Journal, 3, Issue 1, p.39.
- (\* 14) I. Stewart (1989), “*Does God Play Dice?: The Mathematics of Chaos*”, Penguin Books Ltd., 須田不二夫・三村和男訳 (1992), 「カオスの世界像：神はサイコロ遊びをするか？」, 白揚社, p.224。
- (\* 15) D. Ruell (1989), “*Chaotic Evolution and Strange Attractors*”,

Cambridge, England, Cambridge University Press.

- (\*16) N. Packard, J. Crutchfield, D. Farmer, and R. Shaw (1980),  
“*Geometry from a Time Series*”, Physical Review Letters 45, pp.712-716.
- (\*17) A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A. Vastano (1985),  
“*Determining Lyapunov Exponents From a Time Series*”, Physica 160,  
July, pp.285-317.
- (\*18) E.E. Peters (1991), op.cit., p.170, 新田功訳 (1994), 前掲書, p.  
199。
- (\*19) P. Grassberger and I. Procaccia (1983), “*Characterization of  
Strange Attractors*”, Physical Review Letters 31, pp.346-349.
- (\*20) P. Grassberger and I. Procaccia (1983), Ibid, p.346.