

カオスの振る舞いと販売予測

大 石 展 緒
秋 葉 佳 克

◆キーワード

時間発展 (develop in time) カオス (chaos) 非線形動学システム (nonlinear dynamic systems) 分岐 (bifurcation) 点アトラクター (point attractor) 極限周期軌道 (limit cycle) ストレンジ アトラクター (strange attractor) 最近隣モデル (nearest neighbor models) 相空間 (phase space)

はじめに：

最近の市場動態の複雑性を見ると、マーケティング現象にもカオスの振る舞い (chaotic behavior) が存在する可能性に気付く。カオス (chaos) を理解するには、何よりもまず実際に観測される時系列的な事実を受け入れることから出発する。カオスはノイズではないし、測定を誤ったり、アプローチのまずさに起因するものでもない。初期条件のわずかな相異によって秩序的か否か、結果を予測しうるか否かが変わってくる。本章では、まずカオス理論の初歩を予測問題の視点から概説し、そして短期販売予測へのアプローチを取りあれる。併せて、自然界の法則と呼ばれる成長曲線とカオスとの関係にも言及する。

1 カオス理論と予測

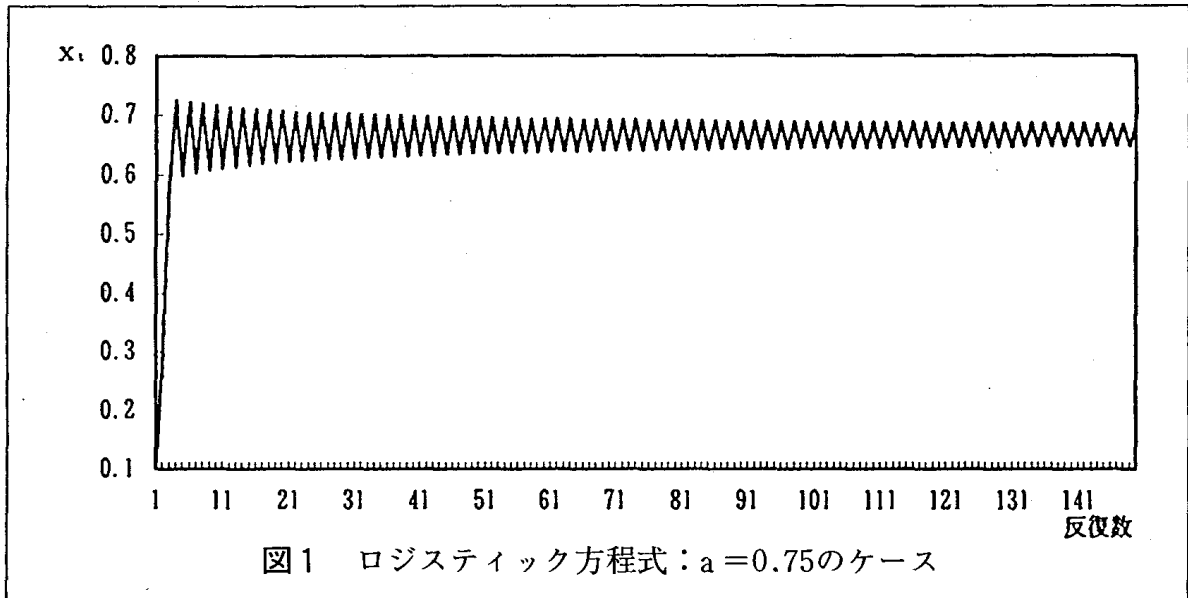
近年話題になっているカオス (chaos) は、マーケティングの分野、とりわけ需要予測や販売予測の領域においても注目を集めている。企業のリサーチの内にも、マーケティングにおけるカオスの時系列のパターン (chaotic time series patterns) を考察する者もすでに現れている。よく知られるように、カオスは、決定論にしたがいながらも乱れていて、不規則で、長期的予測が不可能な現象を示している。予測という観点からいえば、カオスの長期予測不能性という特性は、初期条件に対する敏感な依存性に起因する。この特性は、バタフライ効果と呼ばれることもある。「カオス的な振る舞いで先のことが予測できないのは、気象学者がいうバタフライ効果のためだ。これは、蝶が羽を動かして大気の流れが少し乱れただけでも、地球の裏側で嵐が起きるという意味であり、最初の条件のごく小さな変化に敏感であることと、カオス的な振る舞いが予測できないことを意味する。初めにわずかな差があると、あとで大きな違いが生まれる……。」¹⁾ カオスは、非線形動学システム (nonlinear dynamic systems) を用いてモデル化が可能である。そもそも、動学システムは、非線形フィードバック・システムである。現れたことが元に戻ったり、転換したり、元に戻ったものが現れたりするといった挙動を際限なく繰り返す。たとえば、2個の時計がまったく同質同形に作られたとしても、最初の条件にわずかな相違があれば、同時には作動しない。フィードバック・システムには、先のことが予測できない性質をそれ自体有しているのである。

下記の1式は、ロジスティック方程式の一般式という名称で知られている1次元の非線形フィードバック・システムである。それはまた差分方程式であって、離散的なシステムでもある。

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t) \quad (1)$$

ただし、 t は時点、 x および a の存在範囲は $0 < x \leq 1$ 、 $0 < a \leq 1$ である。

a の値を大きくしてゆくと、 $a=0.75$ に達して初めて興味深い事象が生起する。図1に見るように、システムは1つの値に収束せず、2つの値の間を振動する。



一般に、1つの解から2つの潜在的な解への分離は、分岐 (bifurcation) と呼ばれている。 $a=0.9$ で、システムは、図2に見るように、一切の安定性を失うことになる。

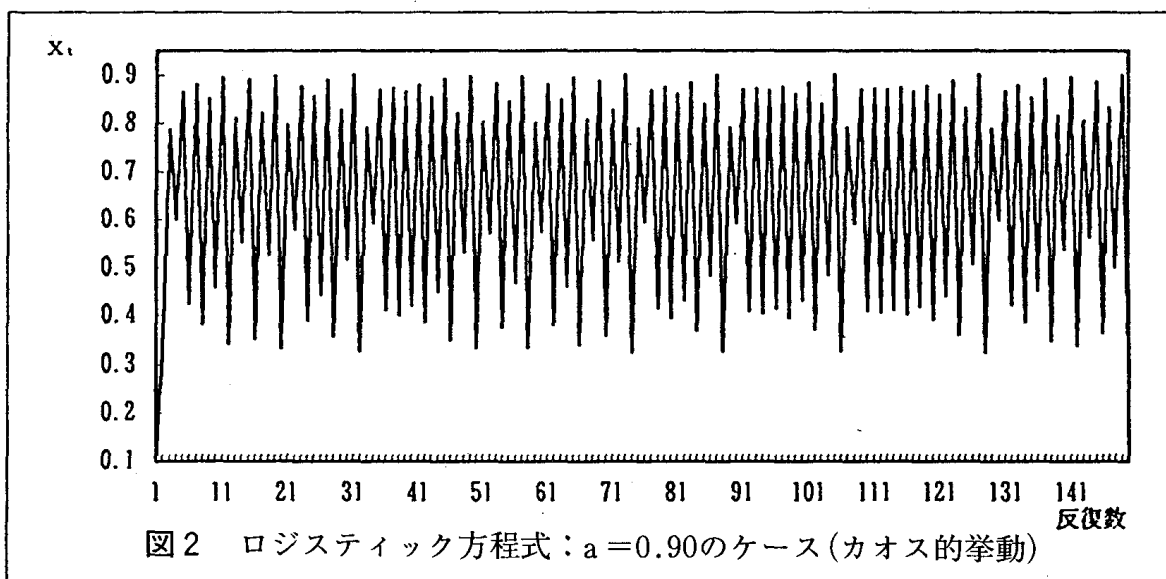


図2から、解は無数に存在し、時系列の挙動よりカオスを見ることができよう。かくて、一見単純に見える1式の方程式は、実はきわめて複雑な振る舞いを提示することが理解できよう。ここで参考までに、ロジスティック方程式のような挙動をとる身近な例を引用する。その物理的システムの一例として、拡声器をあげることができる。「仮にボリュームを低くセットしたスピーカーの近くにマイクを置けば、低いなり声が聞こえるであろう。スピーカーのボリュームを上げると、スピーカーは突然二つの音程の間を行ったり来たりする。ボリュームを上げ続けると、より多くの分岐が現れ、ある臨界点でフィードバックのコントロールがきかなくなる。これが、音響におけるカオスである。」²⁾

ところで、動学システムは、2種の部分から構成されている。第1は状態 (state) と呼ばれるシステムについての本来的な情報であり、第2は動学的 (dynamic) といわれる、状態がいかに時間発展するかを記述するためのルールである。動学システムのモデリングにおける主要なコンセプトは、アトラクター (attractor) と呼ばれるものである。これは、「簡単にいえば、摩擦のようなエネルギーの散逸を伴う一般のシステムにおいて、われわれが定常的に長時間安定して観測し続けることのできるシステムの状態」³⁾を意味する。アトラクターは、地形でいえば窪みの底である。雨水は、ここに向かって集まってくる。雨水がその一つのアトラクターに集まるような領域の全体は、ベイスン (basin) と呼ばれている。このたとえに見るように、アトラクターに引きつけられていく初期状態の集合がベイスンなのである。要約すれば、アトラクターとは、非線形動学システムにおいて、システムの均衡水準を規定する要素であり、単一あるいは1セットの値をもつことになる。平易にいえば、アトラクターとは、相空間上での点の動きが時間の経過と共に吸い寄せられる軌道や点といえよう。アトラクターには、基本的に3種のタイプが存在する。第1の最も単純なタイプは点アトラクター (point attractor) と呼ばれるもので、重力によって振幅が減衰する振子はその典型である。初

期条件とは無関係に、システムは原点に帰着する。換言すれば、原点がシステムの均衡状態なのである。このように、非線形動学において、すべての軌道が1つの値に引き寄せられるアトラクターが点アトラクターなのである。第2のタイプは、極限周期軌道 (limit cycle) と呼ばれるもので、振子の例でいえば、振幅が大きいときには正の摩擦が働き、振幅が小さくなると負の摩擦が作用するような場合に実現される。ファン・デル・ポール振子と呼ばれるそのような振子は、単振子と異なり非線形の運動方程式に従うことで知られている。要約すれば、極限周期軌道とは、相空間の中で周期的 (periodic) な循環ないし軌道を有するアトラクターを指すのである。以上のような2種のアトラクターは、単純かつ規則的であり、通常データの時間推移を視覚化することで識別できよう。カオス的な振る舞いは、不規則かつ複雑で、時間推移の視覚化によっても識別不能な第3のアトラクターを生成する。これが、いわゆるストレンジ・アトラクター (strange attractor) と呼ばれるものであり、「点が同じところに現れることもなければ軌道が交わることもないが、点も軌道も共に相空間の同じ領域の中に留まっているような、相空間のアトラクター」⁴⁾を指す。「ストレンジ・アトラクターは、あらゆる可能性を包含している。均衡は相空間のある領域、つまり無数の解をもつ有界の領域となる。」⁵⁾ 重要な点は、所与の時系列の期間を越えて、種々のアトラクターが作用するかもしれないという事実である。

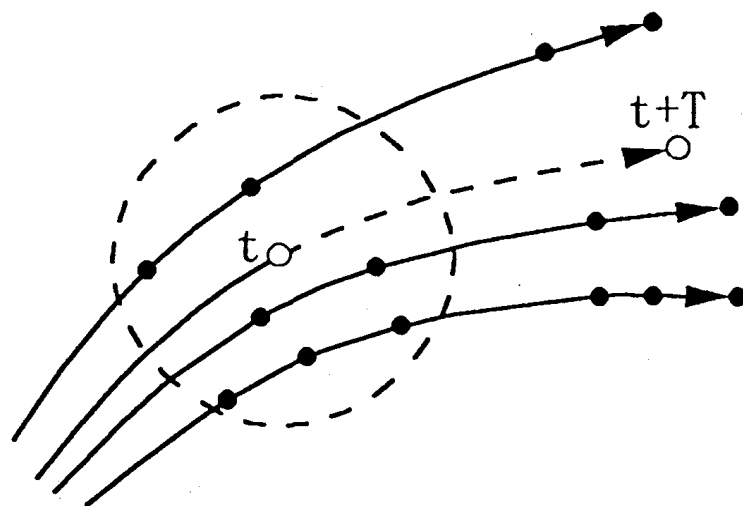
いずれにせよ、初期条件に対する敏感な依存性 (sensitive dependence on initial conditions) として知られている特性は、カオス的な振る舞いを定義する際の重要な要件の一つなのである。所与の観測値がカオス的な振る舞いを示すか否かの可能性は、時系列モデルを構築するに当たって重要な意味をもつのである。

2 最近隣モデルの概要

多くのカオスに対する経験的研究は、カオス的な挙動を表現できる離散的

動学モデルの時系列への応用に見られる。生物学的、物理学的システムが、カオス的な振る舞いを表現する方程式で再現できるのは明白である。最近では、経済学や社会科学における分野でのカオスの研究も、除々にではあるがその成果が現れるに至っている。

一般的に、実用的な非線形モデリングの技法は、フラクタル次元の計算 (fractal-dimension computation) よりも低次元の決定論的カオスが存在するか否かの強力な検証を与えてくれるといわれている。加えて、カオスが存在するならば、非線形の技法は、通常の線形技法を越えて短期予測を可能にするかもしれない。J. D. Farmer と J. J. Sidorowich⁶⁾ は、上述のような問題意識を背景に、その具体的な接近法の一つとして局所的な表現を推奨している。これが、いわゆる局所的近似 (local approximation) と呼ばれるもので、近隣性 (neighborhoods) が得られるようにデータを分割し、各々の近隣性に対し個別にパラメータをフィットさせる操作を取る。基本的な発想は、図3に載せてある。



(注) t は時点であり、円形内の黒丸印は、 $y(t)$ の近隣性を示す。

図3 予測における局所的近似の発想

現在の状態 $y(t)$ と将来の未知の値 $y(t+T)$ は白丸印で、点線での円形内の黒丸印は $y(t)$ の近隣性を示している。短期的な予測値を得るためには、領域内の近隣性を示すデータに着目し、状態がその範囲内である遅れをもって時間発展すると考えるのである。いずれにしても、予測に有用と思われる望ましい 1 セットの近隣データをいかに生成するかは重要であり、その単純な基準が距離の短かさとなる。「カオス的な振る舞いは動的なゆえ、伝統的な時系列モデルでは表現できない。時系列分析への代替的アプローチは、静態性を伴う統計的均衡 (statistical equilibrium) を必要としない最近隣法 (nearest neighbor techniques) として知られている方法の一つである。」⁷⁾ カオス的な振る舞いをモデル化する一般的なアプローチには、C. T. Stone⁸⁾ による最近隣分析のコンセプトが役立つ。最近隣モデル (nearest neighbor models; 略して NN モデル) とは、時系列データにおいて、ある時点のデータとそれに隣接する過去の一定期間に連続するデータ群とを対応付け、そのデータ群の類似しているものを採用してウエイト付けし、合成的予測値を導出するためのものである。当該モデルは、状態空間 (state space) においてベクトルを形成しているラグ付きの時系列値を使用する。ベクトルは、時系列のアトラクターを再構築するのに必要となる。予測は、アトラクターの周囲に存在するベクトルの歴史的道筋 (historical path) に基礎をおく。最近隣モデルの特徴は、伝統的な時系列モデルや回帰モデルに代表されるような関数関係をとらない点にある。代りに、当該モデルは、時系列においてどんなアトラクターが作用しているかを幾何学的に再現する。予測は、アトラクターが存在する適切な領域に焦点を合わせて実行されるのである。

3 単純なモデルによるアプローチ

最近隣モデルの単純なものを取りあげ、アプローチのステップを説明する。アプローチは、以下の 6 ステップから構成されている。

(ステップ 1) 分析、予測の対象となる時系列データを用意する。

(ステップ2) 状態空間を作成する。

(ステップ3) 最新時点の状態空間ベクトルと、他の時点の状態空間ベクトルとの距離を導出する。

(ステップ4) ステップ3で導出した距離を短い順に並べ、最近隣からいずれの距離までを次の時点の予測に採用するか意思決定を行う。

(ステップ5) 採用する距離より、合成的予測のためのウェイトを導出する。

(ステップ6) ステップ5で求めたウェイトを用いて、合成的予測値を導出する。

以上のステップの詳細を、順次、以下に説明する。

(ステップ1) 時系列データの整備。

対象とする時系列のデータを y_1, y_2, \dots, y_T で与える。

ここに、 t は時点、 $t = 1, 2, \dots, T$ である。

(ステップ2) 状態空間ベクトルの作成。

$$E_t = [y_{t-D} \cdots y_{t-i} \cdots y_{t-1}] \quad (2)$$

E_t : 状態空間ベクトル

t : 時点、 $t = D+1, \dots, T+1$; $i = 1, 2, \dots, D$

D : 状態空間ベクトルの次元数

(ステップ3) 最新時点の状態空間ベクトルと、他の時点の状態空間ベクトルとの距離計算。

$$d_t = \left[\sum_{i=1}^D (y_{T+1-i} - y_{t-i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

ここに、 $t = (D+1), \dots, T$

(ステップ4) 距離の短い順での再配置と、次期予測に採用する距離の選択。

$$[\text{距離の系列}] \Rightarrow \underbrace{d_1^* \cdots d_M^* \cdots d_T^*}_{(\text{採用系列})}$$

ここに、

d_k^* : 短い順に並べた距離

k : 距離の短さの順位, $k=1, 2, \dots, T$

M : 採用する近隣データの数

(ステップ5) 合成的予測用のウェイト導出。

$$w_k = \frac{(d_k^*)^{-1}}{\sum_{k=1}^M (d_k^*)^{-1}} \quad (4)$$

ここに,

w_k : 合成的予測のためのウェイト, $k=1, \dots, M$

(ステップ6) 合成的予測値の導出。

$$\hat{y}_{T+1} = \sum_{k=1}^M w_k y_k \quad (5)$$

以上が、単純な最近隣モデルによる $T+1$ 時点の予測値導出の手順である。当該モデルの描写に当たって、特記すべき事項として、特定の状態空間ベクトルからあたかも生成されたような対応データ (outcome data) y_k を予測に活用する点をあげられよう。「対応データとは、状態空間ベクトルで表現される挙動の特定なパターンが観察された際、時系列の歴史的反応を示したものであり、」⁹⁾ 将来の値を意味しない点に留意しなければならない。その理由は、モデルによって形成された各々の状態空間ベクトルから、観測期間中に生起した歴史的時系列値なるがゆえである。かかる捉え方は、因果関係は扨置いて、存在するものをありのままに認めるという発想に根差しているように思われる。

加えて、カオスの特性である初期条件に対する敏感な依存性を考慮して、短期予測への態度についても一言しておこう。この特性は、当初隣同士であった相空間 (phase space) の点が、歴史的な流れに乗って相空間を動き回るうちに、相互に無関係なところに追い遣る性質を意味する。なお、相空間とは、システムがとりうるあらゆる状態をグラフで示したものであり、記述変数が2個ならばそれぞれの値は平面上にプロットされる。相空間の次元は、システムの変数の数に依存する。予測にかかわるこの特性から、原則的にはデータ期間は1時点先が妥当であろう。企業における販売予測の現実を考慮

すると、得られた予測値を観測値とみなして逐次的アプローチを採用しても、最大4～5時点先程度が限度であろう。この範囲を越えた予測は、きわめて不正確になると考えられるからである。

数値例

表1は、あるブランドの単一店舗における10週間の販売数量のデータである。これらのデータを用いて、第11週の販売量を単純な最近隣モデル（NNモデル）から予測する。

表1 あるブランドの単一店舗における販売量（単位：10²袋）

| 期 間 | 販売数量 |
|-----|-------|
| 1 | 6.30 |
| 2 | 12.60 |
| 3 | 5.70 |
| 4 | 12.00 |
| 5 | 6.15 |
| 6 | 11.85 |
| 7 | 5.88 |
| 8 | 12.15 |
| 9 | 5.55 |
| 10 | 12.45 |

アプローチの実際

予測の対象となるデータは、表1に整備されているので、ステップ2から具体的な展開をはかる。

（手順1）表8－1より、状態空間ベクトル（ $D=2$ ）を作成する。
結果は、表2の第3欄と第4欄に載せてある。

表2 短期販売予測用データ作成シート

| 時点 t | 観測値 y_t | 状態空間ベクトル E_t | | 距 離 d_t | 順位付けの距離 d_k^* |
|-----------|--------------|----------------|-----------|--------------|--------------------|
| | | y_{t-2} | y_{t-1} | | |
| 1 | 6.30 | — | — | — | — |
| 2 | 12.60 | — | — | — | — |
| 3 | 5.70 | 6.30 | 12.60 | 0.76485 | 0.44598 |
| 4 | 12.00 | 12.60 | 5.70 | 9.76038 | 0.47434 |
| 5 | 6.15 | 5.70 | 12.00 | 0.47434 | 0.76485 |
| 6 | 11.85 | 12.00 | 6.15 | 9.01624 | 0.84853 |
| 7 | 5.88 | 6.15 | 11.85 | 0.84853 | 9.01624 |
| 8 | 12.15 | 11.85 | 5.88 | 9.10247 | 9.10247 |
| 9 | 5.55 | 5.88 | 12.15 | 0.44598 | 9.54830 |
| 10 | 12.45 | 12.15 | 5.55 | 9.54830 | 9.76038 |
| 11 | — | 5.55 | 12.45 | — | — |

2次元モデルにとって、状態空間は、各々一対の近隣点 (adjacent point) を表すベクトルから形成されている。状態空間ベクトルを図示すると、図4が得られる。

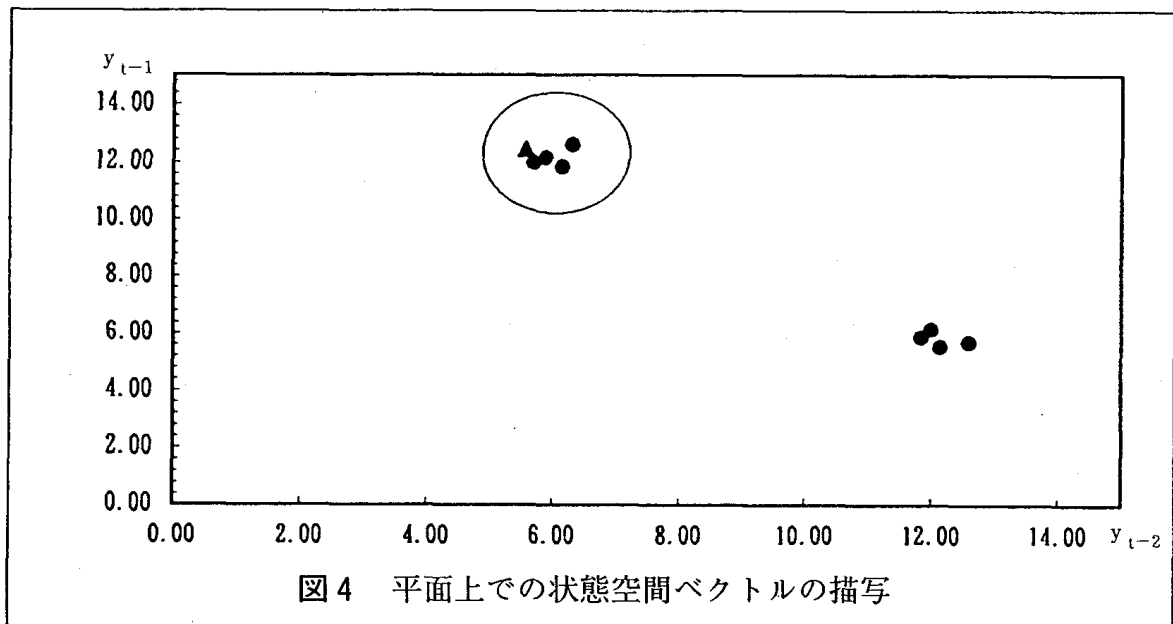


図4 平面上での状態空間ベクトルの描写

図4において、最後の一对の時系列値、[5.55, 12.45] は、三角印で示してある。ここで、三角印を含めた囲みは、最後の一对の時系列値（5.55に12.45が続く）に類似したパターンを示す観測結果を描写している。これらのベクトルが、いわゆる最近隣（nearest neighbors）と呼ばれるものである。

当該技法の基本的考え方は、最近隣にある値に歴史的に続く時系列値が $t+1$ 時点の予測を生成するのに使用できるとの発想に基づいている。識別された最近隣ベクトルへの対応データは、この数値例では5.70, 6.15, 5.88, 5.55である。 $t+1$ 時点の販売予測は、これらの対応データを基礎になされるのである。重要な論点は、最近隣ベクトルがいかに識別されるかにある。識別のためのアプローチには種々の方法があるが、ここでは状態空間におけるベクトル間の距離を採用している。そして、最も短い距離をもつ特定化されたベクトルが、予測のために活用されるのである。

（手順2）最新時点の状態空間ベクトルと、他の時点の状態空間との距離を導出する。結果は、先の表2の第6欄に見る通りである。ちなみに、3式を用いて、 d_3 を求めてみる。

$$\begin{aligned} d_3 &= \left[\sum_{i=1}^2 (y_{11-i} - y_{3-i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(12.45 - 2.60)^2 + (5.55 - 6.30)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.76485 \end{aligned} \tag{6}$$

（手順3）手順2で求めた距離を短い順に並べ、距離の短いものからどこまでを $t+1$ 時点の予測に使用するかを決定する。

短い順に並べた距離は、表3の第2欄に載せてある。一見して、 $d_1^* \sim d_4^*$ が予測の対象になることがわかる。

（手順4）採用する距離より、合成的予測に用いるウェイト w_k ($k=1, 2, 3, 4$) を導出する。

結果は表3の第4欄に示してあるが、参考までに w_1 の導出プロセスを下記に与える。演算には、予測に採用する距離の逆数を使用する。

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{(d_1^*)^{-1}}{\sum_{k=1}^4 (d_k^*)^{-1}} \\
 &= \frac{2.24225}{6.83640} \\
 &= 0.32799
 \end{aligned} \tag{7}$$

表3 短期販売予測用データ一覧

| 順位 k | 順位付けの距離 d_k | 距離の逆数 | ウェイト | 対応データ y_k | 積 和 $w_k y_k$ |
|-----------|------------------|-----------------|---------|----------------|------------------|
| | | $\frac{1}{d_k}$ | w_k | | |
| 1 | 0.44598 | 2.24225 | 0.32799 | 5.55 | 1.82034 |
| 2 | 0.47434 | 2.10819 | 0.30838 | 6.15 | 1.89654 |
| 3 | 0.76485 | 1.30745 | 0.19125 | 5.70 | 1.09013 |
| 4 | 0.84853 | 1.17851 | 0.17238 | 5.88 | 1.01359 |
| 合計 | 2.53370 | 6.83640 | 1.00000 | — | 5.82060 |

ウェイト合計は、必ず1に帰着する。

(手順5) 翌週の販売予測を行う。

翌週の販売量の予測値 \hat{y}_{T+1} は、表3の第4欄のウェイト w_k と、第5欄の対応データ y_k を用いて導出する。

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{T+1} &= \sum_{k=1}^4 w_k y_k \\
 &= (0.32799)(5.55) + (0.30838)(6.15) \\
 &\quad + (0.19125)(5.70) + (0.17238)(5.88) \\
 &= 5.82060 \\
 &\simeq 5.82 \quad (10^2 \text{袋})
 \end{aligned} \tag{8}$$

単純な最近隣モデルでは、翌週の販売量は582袋と予測される。

理論的に見て、過去の挙動を識別できる情報ライブラリーを形成する十分なデータが与えられれば、トレンド、周期性、カオス的影響などのあらゆる

タイプの挙動パターンがモデルによって表現できるかもしれない。重要な考慮すべき事項は、分析に採用するデータ・インターバルである。マーケティング現象の計量化を時系列的に考察する場合、モデルの解がデータ・インターバルのいかんによって異なる結果を呈する可能性は高い。したがって、データを収集する場合、月次時系列では十分な分析力を失い、予測力を弱めることにもなりかねない。最近隣モデルによる短期販売予測では、旬別か週別の時系列値が意味をもつことになる。

単純な最近隣モデルを拡張すれば、当然の帰結として、多変量最近隣モデル (Multivariate Nearest Neighbrr Model, 略して MNN モデル) が考察の対象になりうる。当該モデルは、選別された最近隣の対応データに関する重回帰モデルを基礎とする。F. J. Mulhern と R. J. Caprara¹⁰⁾ は、週別時系列による下記のモデルを提示している。

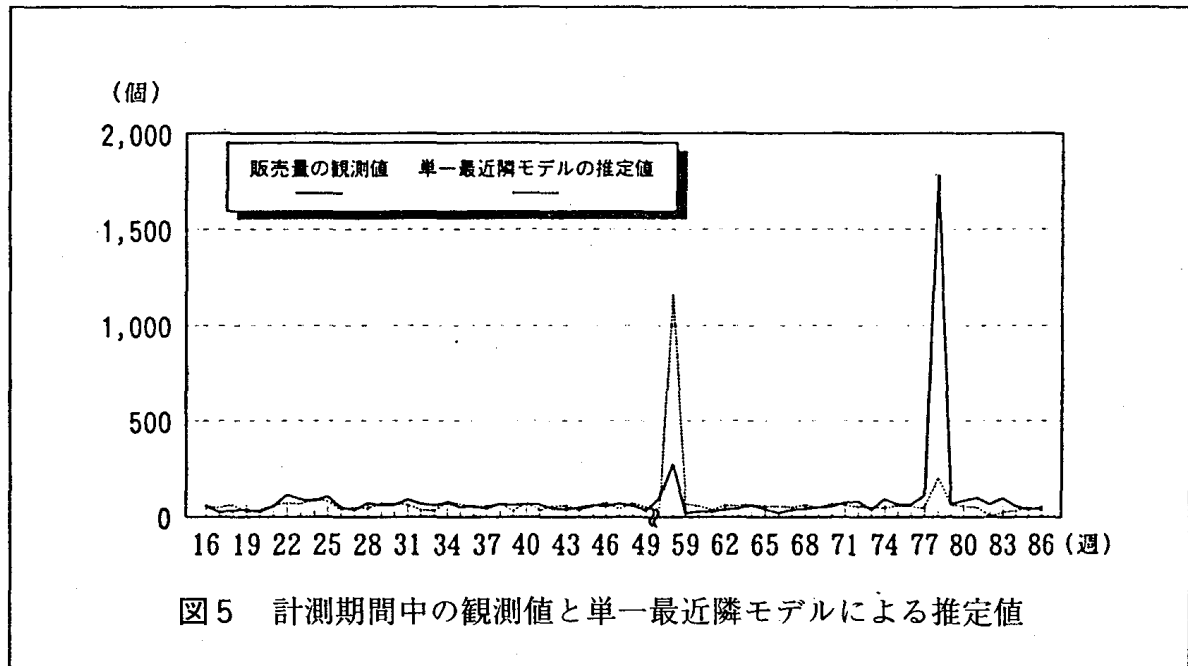
$$\ln Q_{1j} = \alpha + \beta_1 \ln P_{1j} + \beta_2 \ln P_{2j} + \gamma X_{1j} + \epsilon_j \quad (9)$$

ここで、 Q_{1j} は j 週におけるブランド 1 の販売量、 P_{1j} は同様の期間でのブランド価格、 X_{1j} は特売広告の有無を示すデータ変数、 ϵ_j は誤差項を示している。 α 、 β_1 、 β_2 、 γ は、それぞれ推定すべき未知パラメータである。そして、最近隣の個数 z に関して、 $j = 1, 2, \dots, z$ となっている。

当該モデルは、単一の食品店におけるケーキ・ミックスの単一ブランドの週別販売量 (101週のスキャナー・データの内、16～86週、16～101週の両者) で検証されたが、予測の詳しい内容は Mulhern と Caprara を参照されたい。ブランドの販売量は時系列と説明要因の両者の影響を受けるゆえ、その予測は最近隣モデルの魅力的応用を表しているといえよう。「マーケティング・マネジャーは、この方法を代替的価格戦略シナリオの下で、将来時点の積極的販売予測に活用できる」¹¹⁾ と、Mulhern と Caprara は主張している。

最近隣モデルの重要な利点は、伝統的な予測技法では抽出し得なかったカオス的時系列のパターン表現に対する適応性が認められる点にある。また、アプローチ自体は、カオスを表現できる方程式の一つの応用というよりも、

むしろカオス的な振る舞いをモデル化する際の問題解決への実用的回答を示唆するものである。参考までに、Mulhern と Caprara が実施した最近隣モデルによる予測の内、16～86週のデータに基づく計測期間中の観測値とモデルの推定値を、図5に載せておく。



(注) F. J. Mulhern, R. J. Caprara (1994), "A nearest neighbor model for forecasting market response", International Journal of Forecasting 10, p. 203のデータより作図する。

4 成長曲線とカオス

ミクロの販売予測をカオス的な振る舞いをモデル化するアプローチから検討したが、次に、ややマクロの視点に立って市場需要の動向を自然界の法則と呼ばれる成長曲線で表現し、そこにカオスの挙動がどのように関わっているかを検討する。手始めに、H. O. Peitgen と P. H. Richter¹²⁾ による人口の成長モデル (Population Growth Model) を取りあげる。

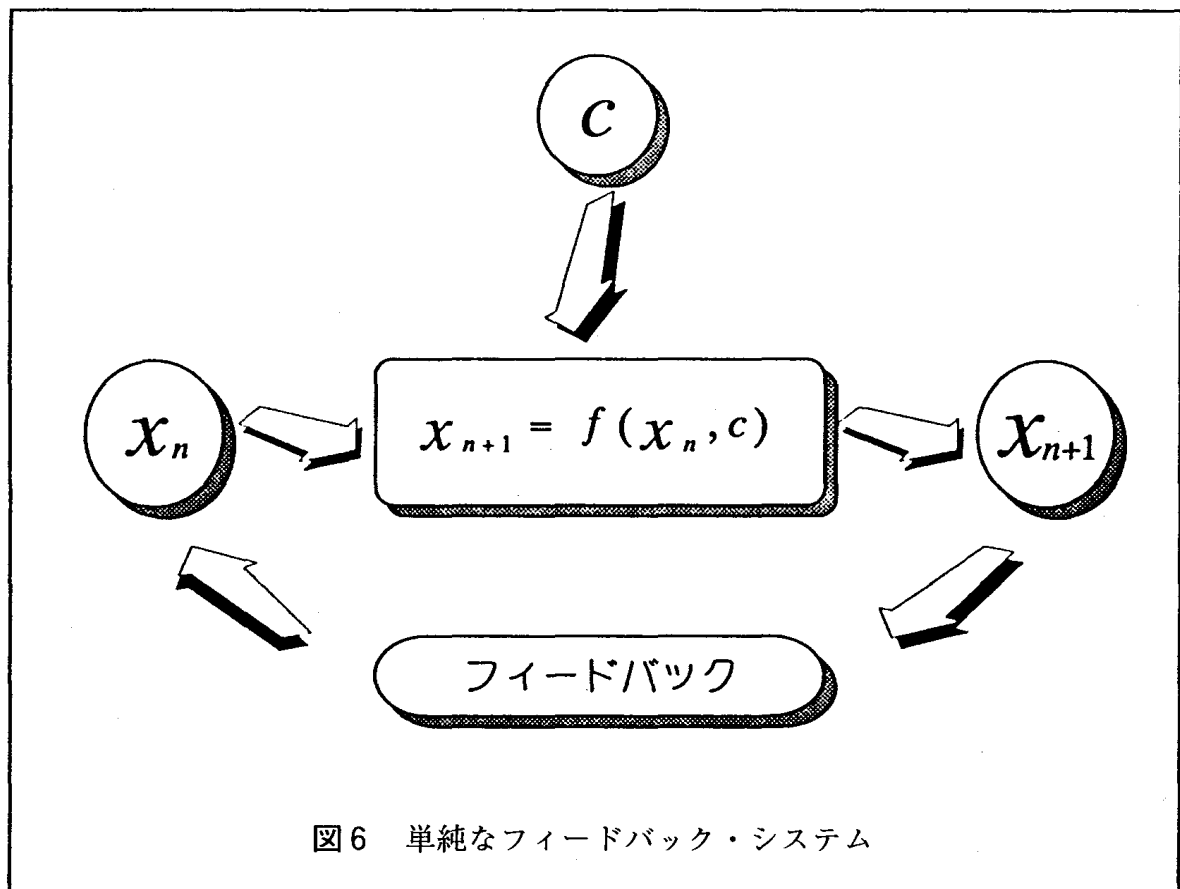
4-1 人口の成長モデル

初期の人口規模を x_0 , n 年後のその値を x_n で与える。成長率 R は、ある

1 年間の相対的増加率で表される。

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \quad (10)$$

ここで、定数 r を導入し、成長に関する動学的なプロセスを考える。それは、図 6 に示すような単純なフィードバック・システムであり、同一の操作の反復を伴い、1 回の反復によるアウトプットが次のインプットを形成する。



いうまでもなく、ここでの必要条件は、インプットとアウトプット間の非線形な関係である。図 6 に即していえば、そのルール、つまり $x \mapsto f(x)$ は、パラメータ r に依存する。任意に x_0 を選択し、上記のような反復プロセスを採用した場合、システムが一連の値 x_1, x_2, x_3, \dots を生成したとき、その長期的振る舞いを問題にするのである。所与のニッチ (niche) は、あ

る極限的な規模（飽和水準） X をもつものとし、便宜上それを1にセットしておく。先の定数 r については、 $r > 0$ であり、一般に成長パラメータ（growth parameter）と呼ばれている。 $x_n < 1$ ならば人口は、 $x_n = 1$ になるまで増加傾向をたどる。成長に関する動学的ルールは、次のような非線形の形態が理にかなうと思われる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ &= (1+r)x_n - rx_n^2 \end{aligned} \quad (11)$$

11式の右辺第2項 rx_n^2 は、死亡率を示している。人口は所与のニッチ（niche）内において $(1+r)x_n$ の割合で増加するが、 rx_n^2 の割合で収縮する。成長パラメータ r が大きくなるにつれて、非線形フィードバックのメカニズムは人口に複数の安定状態を可能にする。逆に、人口がより小さな規模に近づくにつれ、大きな潜在的規模にするための必要資源が入手できることになる。システムの安定性を見るために、若干のシミュレーションが有効となろう。

4-2 シミュレーション結果とカオス

シミュレーションを実行するために、初期値 x_0 をセットする必要があるが、その際2つの選択肢が存在する。具体的には、 $x_0 = 0$ と $x_0 = 1$ の場合である。

(1) $x_0 = 0$ の場合

この場合は、何ら人口の成長も望めない。もしも、 $0 < x_0 \ll 1$ で、かつ $r > 0$ ならば、次年度の成長は次式で近似できる。

$$x_1 \simeq x_0 + rx_0 \quad (12)$$

かくて、頑強な状態 x_0 は不安定になる。

(2) $x_0 = 1$ の場合

$x_0 = 1$ が頑強であるか否かを見極めるために、微小な偏差 $\delta_n = x_n - 1$ を

用いた時間発展 (develop in time) を考え、次式を用意する。

$$\delta_{n+1} \simeq (1-r)\delta_n \quad (13)$$

ここで、初期値は、 $x_0=0.1$ を採用する。シミュレーションの実行には、成長パラメータ r の変化範囲を $0 < r < 2$ と $r > 2$ の2通りを考える。図7には、 $r=1.8$, $r=2.3$, $r=2.5$, $r=3.0$ の4通りの場合における人口の成長状態が示されている。

上記のように、成長の自然法則をパターンごとに分離させることにより、数学的にカオスが生成できる。図7から、次の事実が示唆される。

- ① $r=1.8$ では、システムに安定性が見える。
- ② $r=2.3$ では、周期2の振動を得る。
- ③ $r=2.5$ では、周期4の頑強な振動を示す。
- ④ $r=3.0$ では、いわゆるカオスを得る。

シミュレーションを通して、成長パラメータ r が大きくなるにつれ、相互作用に対する複雑性はますます強化されることがわかる。最終的に、 $r=2.570$ で、プロセスは周期性をまったく失い、いわゆるカオスの出現を向える。前述のように、 r が大きくなるにつれて、分岐 (bifurcation) が生起する臨界点は接近するように思われる。当該システムにおいて、分岐点の正確な分析は、非線形現象の世界にとって基本的かつ重要なものである。これは、ある特定の安定的時点におけるパラメータのインターバルに関連する。 r_n が n 番目の分岐での成長パラメータであるならば、インターバルの長さの比 δ_n は、

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (14)$$

で与えられ、M. Feigenbaum と同様に、S. Großmann と S. Thomae が発見している。

$n \rightarrow \infty$ ならば、

$$\delta_n \rightarrow \delta = 4.669201660910\cdots \quad (15)$$

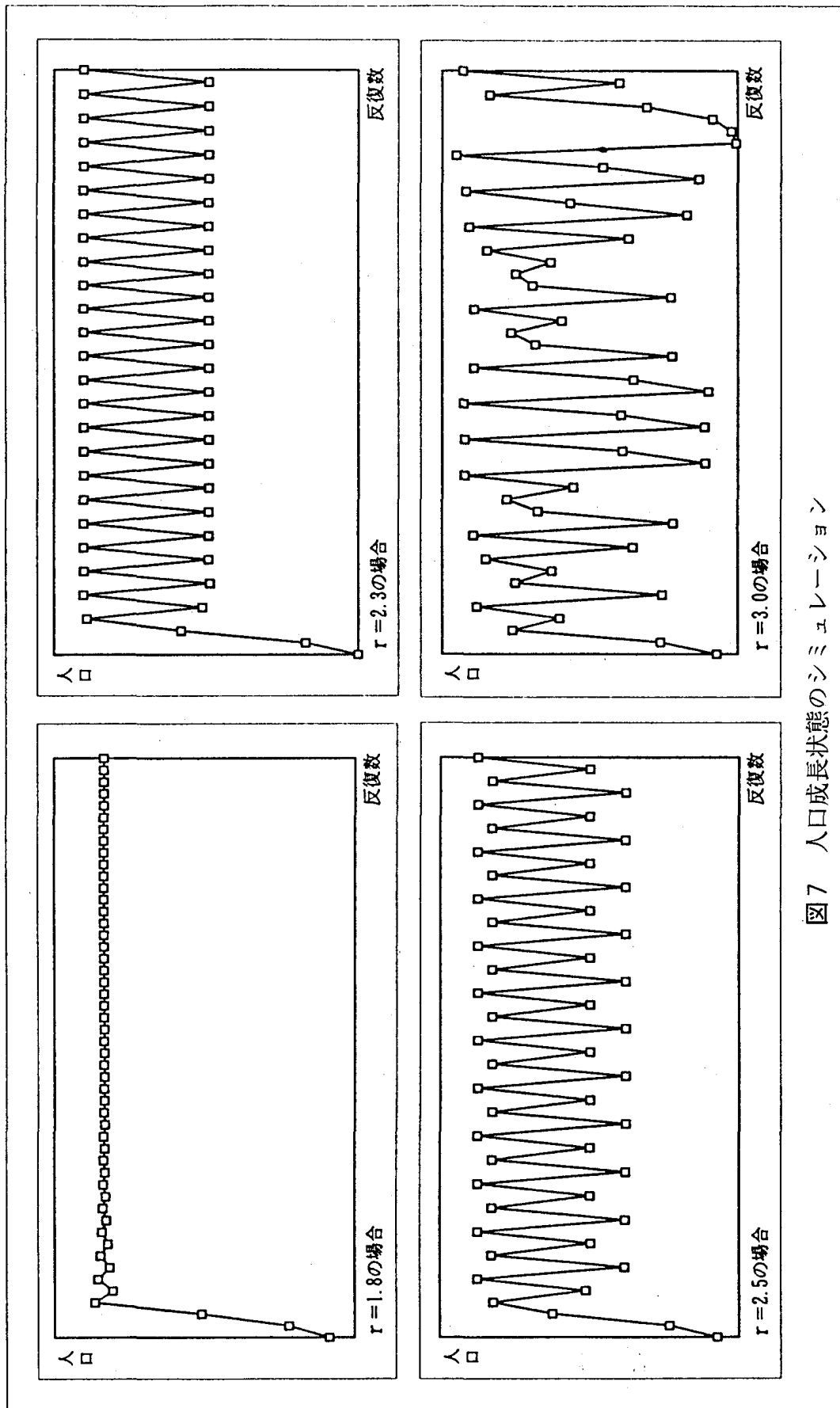


図7 人口成長状態のシミュレーション

であることが知られている。当該比率は普遍的な定数であり，次の臨界水準がいつ到来するか予測を可能にし，種々のカオス的方程式を分類する機能を有しているのである。なお，図8には，人口の成長に関する分岐ダイアグラムを載せてある。

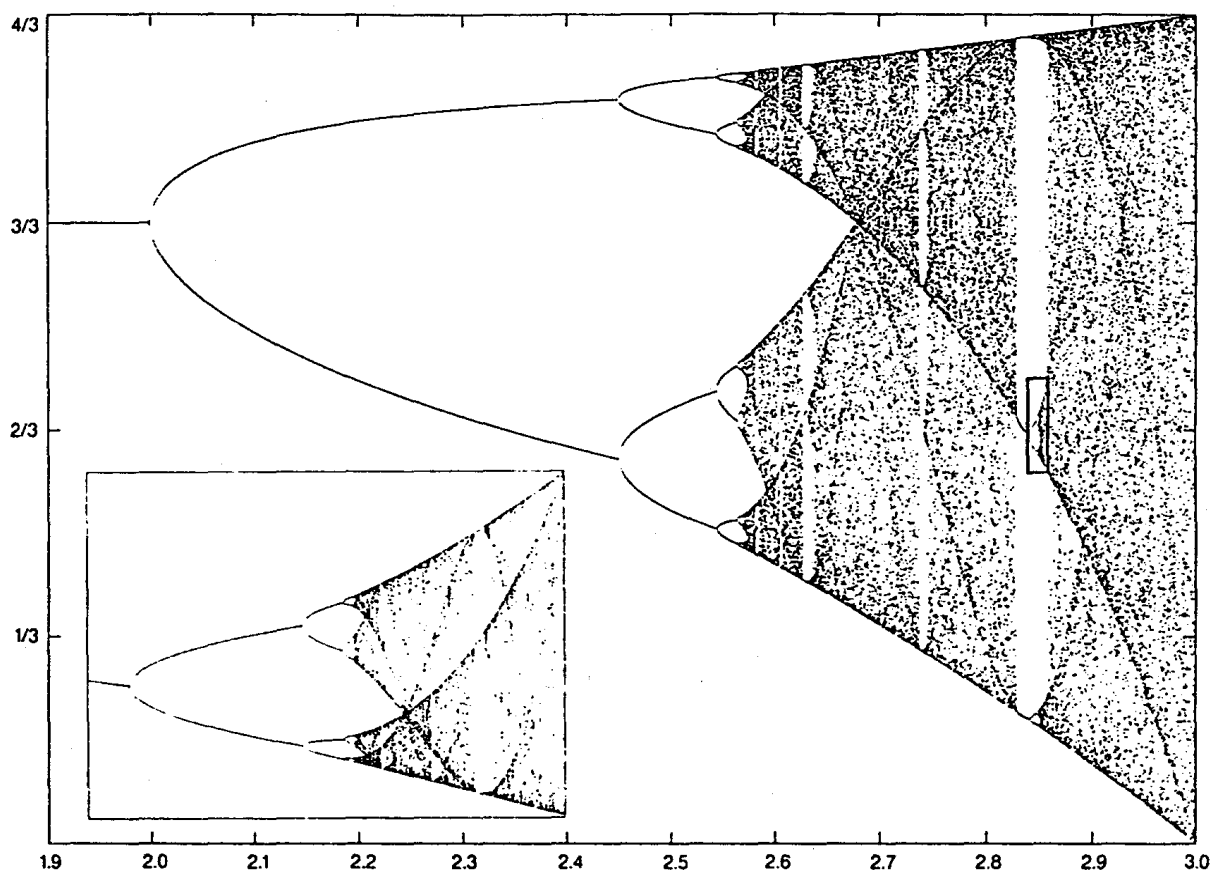
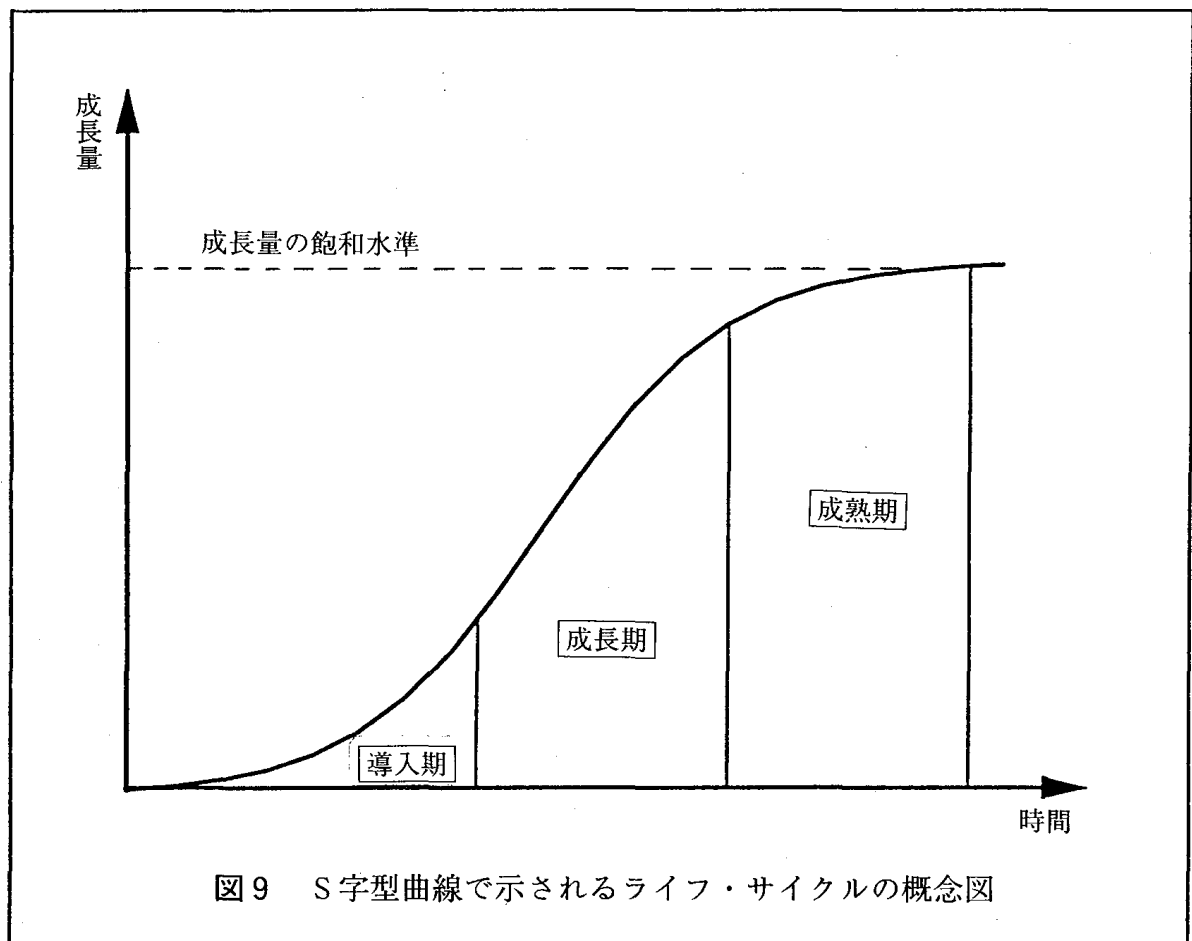


図8 分岐ダイアグラムの一例

分岐ダイアグラムは方程式の解の集合であり，統計的にいえば，すべての点が同様に確からしいわけではないことを意味する。濃い縞と次第に広がりを見せる解の幅は，成長パラメータ r の値が増加するにつれて確率の性質がどのように変化するかを示している。カオスの領域にある r の各値で，有限空間の中に無限に解をもつことがわかる。

4-3 システムの飽和とカオス

ライフ・サイクル (life cycle) はマーケティング・マネジメントにおいて多くの応用面をもつが、その語源は生物学にあって、寿命を周期で捉える考え方として一般に知られている。心理学者や歴史学者、ビジネスマンなども、製品や産業、国家、社会の成長過程を説明するのにライフ・サイクルの考え方を活用する。図9に見るS字型曲線は (S-shaped curve) は、ライフ・サイクルの導入期、成長期、成熟期、衰退期の4段階の内、衰退期を除いた3段階を例示したものである。これら3段階の情報量を連続的に捉えると、S字型曲線が得られる。



S字型曲線の背景にあるものは、自然増加が最終的に飽和水準に至り、上限未達分としての増加量に従うという、いわゆる自然界の法則が作用する事

実である。

「生存競争の単純な形は、一つあるいは複数の種が限られた資源のニッチ (niche) を争って少しでもその種を増やそうとする営みである。時を経て、その種がそれに成功したか否かによって、種の数は一時的に上昇または下降の S 字型曲線を描く。あるニッチが収容能力一杯まで満たされると、その種数は他の種の数が増える割合でしか増えない。このような形で種の交替が起こり、競争が自然な状況で行われる限り新しい種が古い種にとって替わる交替は、自然の成長過程を表すお馴染みの S 字型曲線に従っている。」¹³⁾ 一般に、これまでに述べた S 字型曲線は、成長曲線 (growth curve) という名称で知られている。

自然の成長過程は、製品の市場需要の動向にも見いだされる。当然のことながら、その時系列的な動向には、ランダムな部分と成長過程を制御する基本的法則に従う部分とが混在することになる。個別の製品の市場動向を特徴づけるランダムネスと自然の成長過程を示す S 字型曲線とのギャップを埋める変化こそ、これまでに述べてきたカオス的挙動にはかならない。前項において、Peitgen と Richter による人口の成長モデルを取りあげたが、彼らは成長の自然法則をパターンごとに分離することからカオスを数学的に作ったわけである。シミュレーションの結果から、全体の人口の成長はパラメータのわずかな変化でスムーズに飽和水準に到達せず、行き過ぎたり、後戻りしながら振動することを示唆している。いくつかの媒介変数のために、この振動は低下せず、単純か複雑かは別として、規則正しいコスモス的リズムのパターンか、カオス的リズムのパターンに変容するかのいずれかを選択するように思われる。図 7 を再度参照し、製品の市場における成長過程の経験的帰結をも考慮すると、プロセスが飽和水準に接近するための 3 種の道筋がパターンとして示唆される。¹⁴⁾

- ① 第 1 のパターン：単純安定型
- ② 第 2 のパターン：規則的振動型
- ③ 第 3 のパターン：カオス型

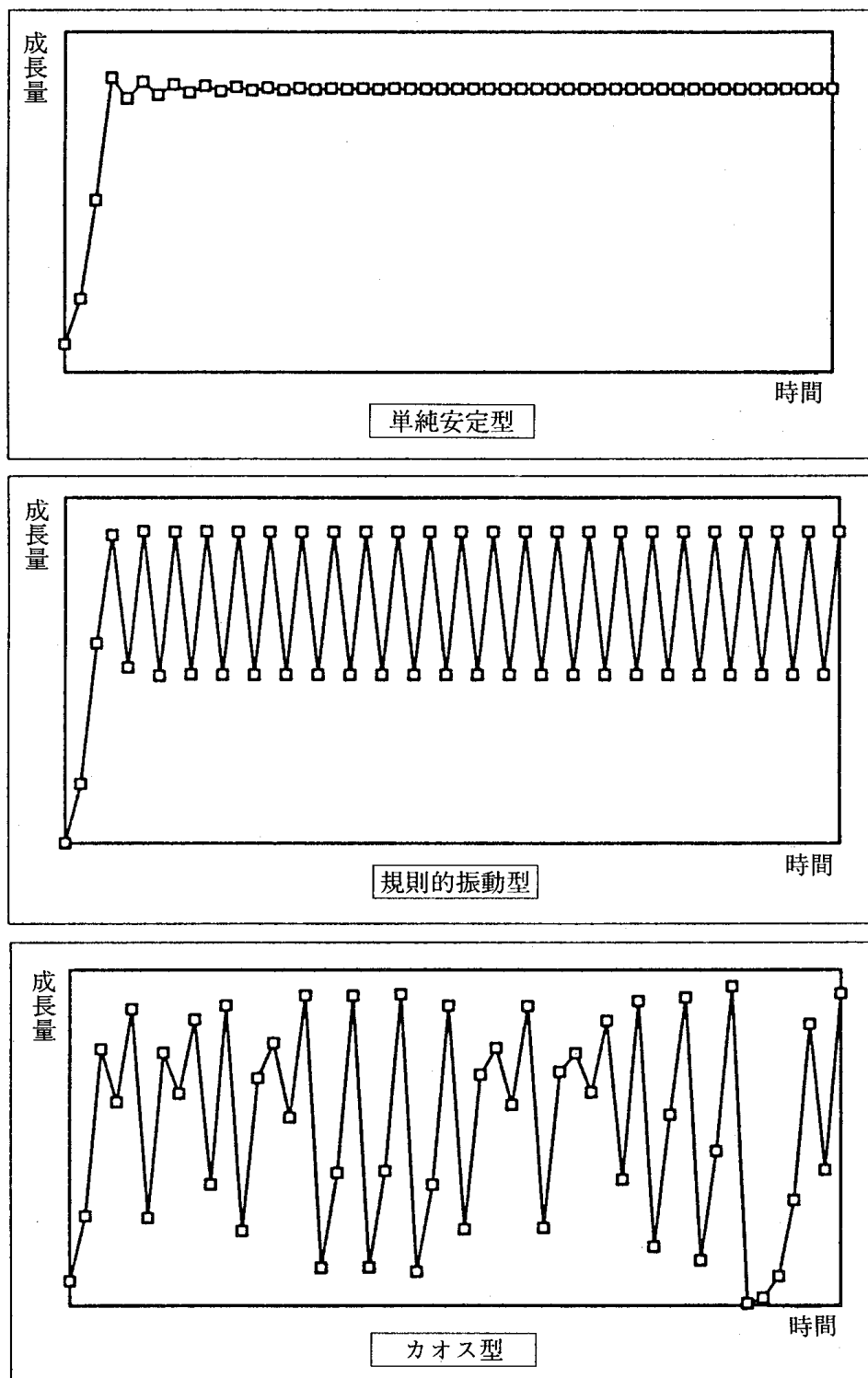


図10 飽和水準に接近するための3種の道筋

第1のパターンは単純安定型といえるもので、安定した割合で集中し劣化する振動である。

第2のパターンは時系列的に見て消滅しない規則正しい振動であり、これを規則的振動型と呼称する。第3のパターンは、いわゆるカオス型であり、規則性のない振動を示す。

以上のパターンを図示すると、図10のようになる。

ここで、カオスの振る舞いを製品のライフ・サイクルと関連づけると、それが生起する段階として、まず成熟期を指摘できよう。対象とする成長量の変動が最適な飽和水準を探索している間は、気まぐれな変動がカオスの振る舞いを誘発するかもしれない。また、新しいニッチが形成されつつある場合も、同様の現象が存在する。観測値のデータとS字型曲線との間に大きな不一致が生ずるのは、成長パターンの初期、すなわち導入期にも見られる。新製品の市場導入でノーマルな成長から逸脱が観察されると、通常、そこには何らかの技術的要因に帰せられる時間的遅れによって、あたかも蓄積されたエネルギーの湧出ともいえる変動が生起する。その変動のパターンは、多く

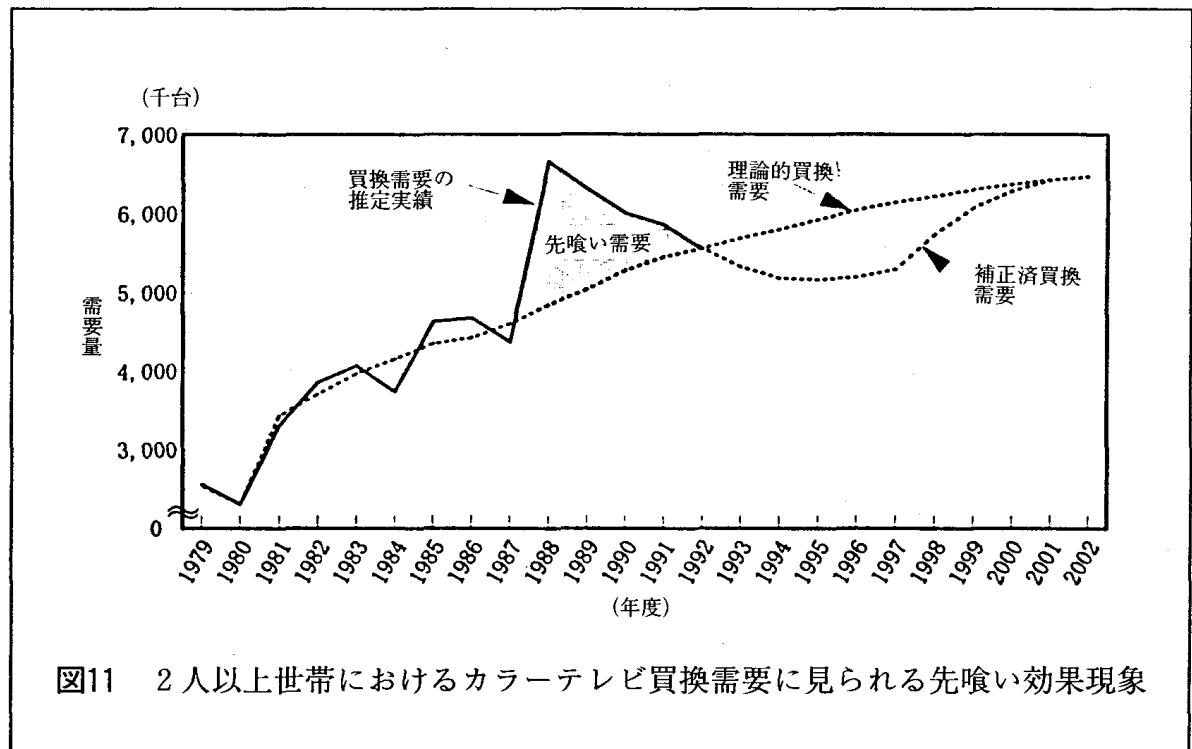


図11 2人以上世帯におけるカラーテレビ買換需要に見られる先喰い効果現象

の場合、カオスの振る舞いを伴う。一般にいわれる追いつき効果は、この種の現象の典型である。追いつき効果と類似したパターンに、先喰い効果と呼ばれるものがある。たとえば、高額耐久消費財で経済環境条件の好転に伴い、平均的な市場寿命以前に大幅な買換（更新）需要の促進が生起した場合、需要の変動パターンにカオスの挙動が生じる可能性は高い。筆者が計測した一例として、1988年度から1991年度の4年間に渡って、わが国の2人以上世帯におけるカラーテレビの買換需要に先喰い効果を見出しうる。その態様は、図11に載せてある。

需要の先喰い効果分は、買換需要の総量から先喰い現象が生起しなかった場合の理論的需要量の差分として定義できる。ちなみに、4年間の累積先喰い効果分は約422万台で、買換需要（約2,483万台）の17.0%に相当する。なお、買換需要の理論値は、表4に見るように、1979年度～1987年度の9年間のデータによる単純な需要関数から試算してある。

先喰い効果が、バブル経済による好況を反映して生起したことは疑いのない事実であり、この影響が後年の買換需要の低下傾向に拍車をかけるものと思われる。

秩序とカオスが結びついている点に関して、製品のライフ・サイクルの視点から若干の考察を試みたが、さらに調査とケース・スタディが必要になる。自然界の法則を考慮して製品の成長過程を観察すると、そこにカオス的な振る舞いが見出せる。それは導入期と成熟期に特有な現象である。急激な成長期には変動が2次的役割しか果たさぬゆえ、その成長はある程度予測できる可能性が浮上する。企業における知的マーケティングでは、常に未来の顧客に関する領域に眼を向けて、その動向を予測するところに核心がある。したがって、長期的予測不能性という事態はそのままでは致命的なことであり、そこに何らかの対応が要請される。1本1本の樹木が成長するか否かは識別不能でも、所与の気候条件や土壌の状況から檜の木が森ができる可能性は予測できるかもしれない。つまり、生物の調節機構や進化の収斂現象、歴史的必然性などのメカニズムがたくみに作用すれば、歴史的決定論ともい

表4 2人以上世帯におけるカラーテレビ買換需要の先喰い効果分析結果
(単位：千台，%)

| 年度 | 2人以上世帯の買換需要 | | | 先喰い分の構成割合 |
|------|-------------|----------|----------|-----------|
| | 実現値 | 理論値 | 先喰い分(差分) | |
| 1988 | 6,657 | 4,837.9 | 1,819.1 | 27.33 |
| 1989 | 6,312 | 5,037.0 | 1,275.0 | 20.20 |
| 1990 | 6,003 | 5,284.4 | 718.6 | 11.97 |
| 1991 | 5,862 | 5,451.3 | 410.7 | 7.01 |
| 合計 | 24,834 | 20,610.6 | 4,223.4 | 17.01 |

<買換需要の理論値導出のための計測結果>

$$\hat{u}_t^* = -56,568.64557 + 3,845.48264 \ln I_t + 1,209.86087 \ln S_t^* - 749,87356 D$$

(1,843.06195) (627.81450) (335.80702)

ここに、

u^* : 2人以上世帯におけるカラーテレビ国内買換需要(千台)

I : 1985年基準実質購買力(10億円)

S^* : 2人以上世帯におけるカラーテレビの保有台数

D : 1980年度の需要の落ち込みを考慮するためのダミー変数

t : 時点($t=1=1979$ 年度)

n : 廃棄係数($n=11$ 年)

モデルの標準誤差 : $s = 289.05322$

自由度修正済重決定係数 : $\bar{R}^2 = 0.88490$

ダービン・ワトソン比率 : $d = 2.59407$

計測期間 : 1979年度～1987年度(9年間)

(注)計測式の右辺に見る括弧内の数値は、回帰係数の標準誤差を示す。

いうる自然界の法則はかなり成り立つと考えられる。このような法則は、一種の整合性のメカニズムと呼称できよう。成長曲線によるアプローチは、以上述べた意味において企業の市場需要の予測に新しい視点を提供すると共に、長期的な販売の方向性を探索する際の指針を示唆してくれよう。

5 予測から計画へのステップ・アップ

これまでに、最近話題になっているカオス的な振る舞いを販売予測や需要予測の立場から検討してきた。一方、企業の予測活動は、何らかの形で計画と深く関連する。販売計画の策定を例に、カオスの挙動が何故に重視されるかを検討してみたい。

5-1 知的段差

カオスの挙動を意識し、捉えるのは計画者であり、カオスと現実とに直面するのは計画の実行者である。これまでに述べてきたようなカオスの挙動に対する両者の認識にズレが生ずるのは、カオスそれ自体の複雑性としての性格から無理からぬことである。予測から計画へのステップ・アップに際し、こうした複雑性現象に対する認識のズレを減少させることも計画の重要な役割でもある。われわれは、この認識のズレを知的段差と呼ぶ。予測活動にカオスを導入することは、企業にとって顧客や市場に関わる複雑性を知識の前提とすることになる。つまり、知的段差はあらゆる分野に生起し、かつ恒常性を有する可能性があるということになる。単純化の思考や切断的思考のために、観察者と観察される事象との間にある、切り離すことのできない紐帯を理解することができない事態、すなわち、盲目の知性が恒常化する。盲目の知性は、カオスのような複雑性現象がもたらす最近の新しい知の病理といわれている。われわれは、販売予測と計画化のステップそれぞれの中に侵入しつつあるこうした病理を取り払う必要があるだろう。

5-2 盲目の知性

かかる病理としての盲目の知性が、現実にはどのような領域に生起するであろうか。表5に見るような販売計画策定マトリクス¹⁵⁾を例として、具体的な知的段差と盲目の領域がどこに顕在するかを検討してみたい。

表5 販売計画策定マトリクス

| <div> <div>行</div> <div>列</div> </div> | | 計画の立案者 | |
|--|---------|---------------------------|--------------------------|
| | | 【既知】の情報 | 【未知】の情報 |
| 計画の実行者 | 【既知】の情報 | 理想的コンセンサスの領域 －『有知』の領域－ | 機会損失の存在する領域 －『盲目』の領域－ |
| | 【未知】の情報 | 機会損失の存在する領域 －『盲目』の領域－ | 自然が最後に笑う領域 －『無知』の領域－ |

当該マトリクスでは、売上高に関する計画立案者とその実行者とのインテリジェンス・レベルの格差から生ずる4つの知的段差が識別されている。これらの段差は、次のような差異を意味する。

① スタッフ情報と現場情報との知的段差。

これは、未来思考と歴史的思考との差異を示している。

② マクロ情報とミクロ情報との知的段差。

これは、全体と部分との知的レベルの格差を示している。

③ プログラム概念と戦略概念との知的段差。

これは、前者の合理性、決定論的、線形性に対する後者の非合理性、非決定論的、非線形性の差異を示している。

④ 既知情報と未知情報との対応関係における知的段差。

これは、先に示したマトリクスのように、4つの異質領域として認識される。

以上の4種の知的段差から、4つのマトリクスの領域がセグメントできる。

[1行1列の領域]：理想的コンセンサスの領域で、いわゆる有知の領域である。

[1行2列の領域]：機会損失の存在する領域で、盲目と呼びうる領域である。

[2行1列の領域]：機会損失の存在する領域で、盲目の領域と呼称する。

[2行2列の領域]：自然が最後に笑う領域で、いわゆる無知の領域である。

かくて、盲目の知性は上述のように、2つの領域において生起すると思われるが、いずれも機会損失に関わるものである。予測から計画へのステップ・アップに際して、当然無知の領域を有知として埋めることは必要であるが、特に盲目の領域に対する知覚の努力が重要になる。

5-3 複雑性と戦略行動

上述の盲目の領域に対するアプローチに関して、「1行2列の領域」では計画立案者における複雑性予測の一層の深耕を必要とするが、「2行1列の領域」では実行者サイドの戦略的行動が重要な意味をもってくる。「車に乗って仕事に出かけるとき、その行動の一部はプログラム化されている。思いがけない渋滞が生じたときに、はじめて、道順を変えるかどうかを決定し、コードを破る必要が生じる。つまり戦略の真価が問われるわけである。」¹⁶⁾ こうした戦略的行動は、複雑性思考を前提としたもので、カオスの挙動を知るための秘訣というよりは、見かけ上の線形や決定論にまどわされることのない判断力と事象の流動性が強調されるのである。「プログラムの利点は、もちろん大きな経済性にある。考える必要がなく、すべてが自動で行われるわけだ。これと反対に戦略は、偶発的な状況、敵対する要素、さらには敵対者までも考慮に入れて決定される。さらに戦略は、その遂行中に提供される情報に応じて適宜変更されるため、非常に大きな柔軟性をもつことができる。」¹⁷⁾ これが、戦略的行動の本質である。注意深い柔軟さに時系列的な要素が考慮されるとき、予測は行動として生かされ、盲目の知性は有知に変換されるのである。

5-4 未来の変化と計画立案者

前述の表5に見る販売計画策定マトリクスにおいて、計画立案者は自己と実行者の状況把握の程度を十分認知し、知的段差が極力生じないような配慮の必要性を述べた。知的段差の形成要因の内、特に注意すべきは、時間軸を加えた市場状況の変化の方向性である。図12は現在から未来にかけて生起するかもしれない事象のフローを図示したもので、横軸は時間の推移を、縦軸は変化の事象がもたらす影響の大きさを示している。ただし、その影響が行動の結果にいかに関連するかは識別できない。

図12から読みとれる重要な内容は、過去、現在、未来にかけて質的に異な

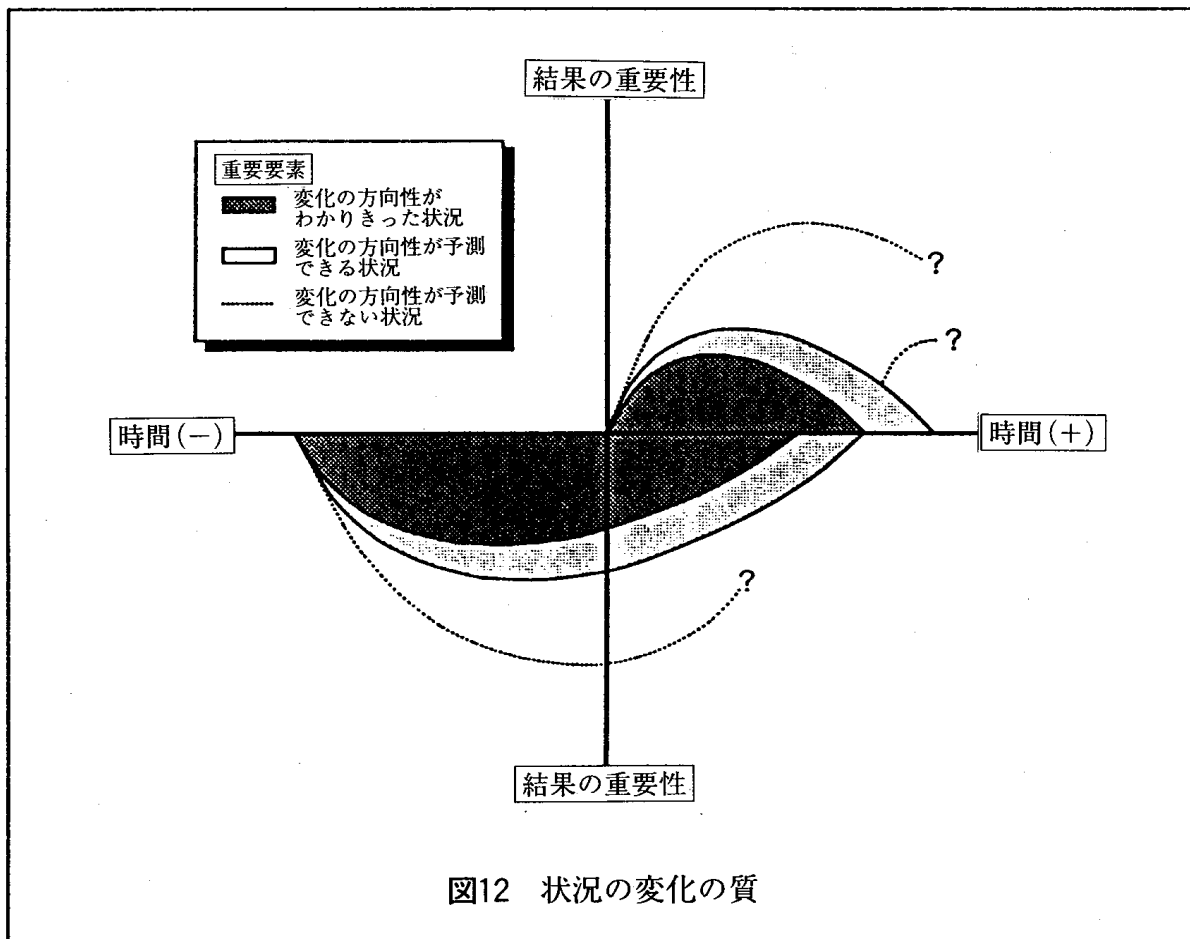


図12 状況の変化の質

(注) R. Stacey (1992), "Managing Chaos: Dynamic Business Strategies in an Unpredictable World", Kogan Page Limited, 石川 昭 監訳(1995), 「カオスのマネジメント」, NTT 出版, p. 201より引用。

る2種の変化が存在することの知覚である。計画立案者にとって、変化の態様に関して、結果がわかりきった状況と不確実性に満ちた状況を明確に識別する能力は市場の複雑性を考えると不可欠なものとなる。多くの場合、過去と近未来は、結果のわかりきった状況の変化と予測可能な状況の変化で占められているが、5年～10年といったいわゆる長期になると不確実な状況の変化が主流になる。R. Stacey¹⁸⁾は、「肝心なことは、次の点である。システムがカオス状態に置かれている場合、過去、現在、未来を問わず、現実の行動が遠い将来どんな結果をもたらすかはまったく予測がつかない。遠い将来の状態は、単に知られていないのではない。将来の姿を知ることがまったく不可能なのだ、」と述べているように、カオス的な振る舞いが計画策定におよぼす非線形の効果を描き出している。一口に非線形現象といっても、線形システムとして近似できる弱非線形性と取扱い不可能な強非線形性が存在する。今後の市場動向の状況には、後者の強非線形性が多く見られるであろう。したがって、計画立案者は未知ということと、予測不可能を識別することの重要性を熟知してほしい。

6 要約と結語

最近になって、カオス (chaos) と呼ばれる科学の新分野が出現し、マーケティング活動の領域、とりわけ予測の問題にも新しい視点を提供している。それは、マーケターの経験と自然界の法則とを結びつけ、単純と複雑、秩序と無秩序の間に繊細かつ有意味な関係が存在することを明示しつつある。ある系にカオスが存在するというのは、いかに高い精度で初期条件を指定しても、系の振る舞い方に対する予測能力がまったく失われるときが、いつかは来ることを示唆している。カオスはホットな話題であり、最近のトレンドでもある。一方、マーケティング活動は、常に未来の市場動向を予測情報として把握しなければならない。したがって、長期予測不能性という特性は活動の効果性から見れば致命的なことであり、そのカオス的な影響を掻き消すよ

うな対応が不可欠となろう。対応への第一歩として、まず観測値に見るカオス的な挙動をモデル化するのにふさわしい実用的かつ代替的アプローチを明示する必要がある。その意味で、短期販売予測への有力なツールとして、単純な最近隣モデル（NN モデル）を取りあげたが、当該モデルの多変量型への拡張も期待できるゆえ、より多くの検証を通して活用上の問題点の発見やモデル化の改善が期待できよう。カオス研究者の多くは、その気まぐれな不規則性に関心をもつが、われわれは現象のモデル化を通して短期予測への可能性と、長期的な方向性の把握を志向する。後者の具体的アプローチとして、従来より成長に関する自然界の法則をS字のパターンで示した成長曲線に焦点を当て、分析のレベルでカオスの存在を留意するよう心がけたつもりである。長期的な市場動向を特徴づけるものは、そのランダムネスと自然の成長過程を示すS字型曲線であり、両者のギャップを埋めるものこそカオスという現象なのである。

人間知性の限界と長期予測不能性とがますますマーケティングの無知を増進させる反面、市場の複雑性のパズルは一層難解なものになるであろう。そして、その過程で市場におけるカオス系のゆらぎが定着する可能性は高いが、市場の調節機構の作用いかんでは現象として表面化するカオス的振る舞いの水準やパターンも様々な形態をとるであろう。市場という現実の世界においては、カオスの要因としての決定論や非線形性が何であるかを理解することはもとより、必然と偶然の狭間にあって、自らのカオスがどの方向を志向しているのか、その方向性を適確につかむことこそより重要な問題であろう。おそらく現実の市場には無数の選択肢が存在するであろうし、方向性の選択も複数の可能性が強い。企業におけるマーケティング活動の要件の一つは、複数の方向性から最適解を選択する「カオス感覚」を磨くことといえるであろう。これは、一種の偶然の動きを捉える視覚的確からしさであるが、予測から計画へのステップ・アップにおいて、行動の計画者も実行者も市場の動向に対する盲目の知性を有知に変換することこそ、その第一歩といえるかもしれない。加えて、計画立案者は、将来の事象に関して未知ということと、

予測不可能という事態の識別を忘れてはならない。

[引用・参考文献]

- 1) D. Olson (1993), "Exploiting Chaos: Cashing in on the Realities of Software Development, Van Nostrand Reinhold, 伊豆原弓, 順田志保子, 山岡洋一共訳 (1994), 「カオスの発想: 情報システムを破綻から救うフラクタル仕事学」, 日経 BP 出版センター, P. 21.
- 2) E. E. Peters (1991), "Chaos And Order In The Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility", 新田功訳 (1994), 「カオスと資本市場——資本市場分析の新視点」, 白桃書房, P. 146.
- 3) 合原一幸著 (1993), 「カオス——まったく新しい創造の波」, 講談社, P. 70.
- 4) E. E. Peters (1991), 新田功訳 (1994), 前掲書, P. 267.
- 5) E. E. Peters (1991), 新田功訳 (1994), 前掲書, P. 166
- 6) J. D. Farmer & J. J. Sidorowich (1988), "Can New Approaches to Nonlinear Modeling Improve Economic Forecasts?", in P. W. Anderson, K. J. Arrow, D. Pines, eds., "The Economy As An Evolving Complex System", Aaaisn-Wesley, P. 106.
- 7) F. J. Mulhern, R. J. Caprara (1994), "A nearest neighbor model for forecasting market response", International Journal of Forecasting, Vol. 10, P. 195.
- 8) C. J. Stone (1977), "Consistent nonparametric regression", Annals of Statistics, Vol. 5, PP 595–620.
- 9) F. J. Mulhern, R. J. Caprara, op. cit., P. 197.
- 10) Ibid., P. 202.
- 11) Ibid., P. 205.
- 12) H. O. Peitgen, P. H. Richter (1986), "The Beauty of Fractals—Images of Complex Dynamical Systems—", Springer—Verlay, PP. 23–26.
- 13) T. Modis (1992), "PREDICTIONS", Simon & Schuster, 高橋秀明訳 (1994), 「予測学入門」, 産能大学出版部, P. 115.
- 14) H. O. Peitgen, P. H. Richter, op. cit., P. 24.
- 15) D. Olson, 伊豆原弓, 順田志保子, 山岡洋一共訳, 前掲書, P. 57, 図 2 – 3 のゴースの窓を参考に作成した。
- 16) E. Morin (1990), "INTRODUCTION À LA PENSÉE COMPLEXE", ESF éditeur, Paris, 古田幸男, 中村典子訳 (1993), 「複雑性とはなにか」, 国文社, P. 119.
- 17) E. Morin (1990), 古田幸男, 中村典子訳 (1993), 前掲書, P. 130.
- 18) R. Stacey (1992), "Managing Chaos: Dynamic Business Strategies in an Unpredictable World", Kogan Page Limited, 石川昭監訳 (1995), 「カオスのマネジメント」, NTT 出版, P. 204.