

ベイジアン法による予測値合成法

大 石 展 緒

◆キーワード

予測値合成 (combination of forecasts) ベイジアン・アプローチ (Bayesian approach) ベータ分析 (beta distribution) 拡散事前分布 (diffuse prior distribution) コンセンサス分布 (consensus distribution) 正確さの最大化 (maximization of accuracy)

はじめに

企業における需要予測や販売予測の実地で、導出された予測値を合成する、いわゆる予測値合成 (combination of forecasts) が脚光をあびつつある。予測値合成の方法は、大別して、単純合成と重み付き合成とがあるが、本小冊子では後者の問題をベイジアン・アプローチ (Bayesian Approach) の枠組で検討する。特に販売予測の場合、最終的な予測値の決定に、複数の意思決定者によるコンセンサス (consensus) は不可決な要件の一つになっている。ベイジアン・アプローチは、複数の意思決定者それぞれに見合う予測値が所与のとき、それらをいかに調整して合理的かつ有効な数値を算出するかといったテーマにも活用できる。具体的な実施例も含めて、以上の予測に対する新しい接近法を検討することこそ、本小冊子の意図するところである。

1 問題の提起

需要予測や販売予測における予測値の合成に関して、企業サイドの関心が高まりつつあると云われている。予測値を合成する動機は、個別の予測モデルが具体化する未来の売上高や与件としての想定した市場環境情報を集積

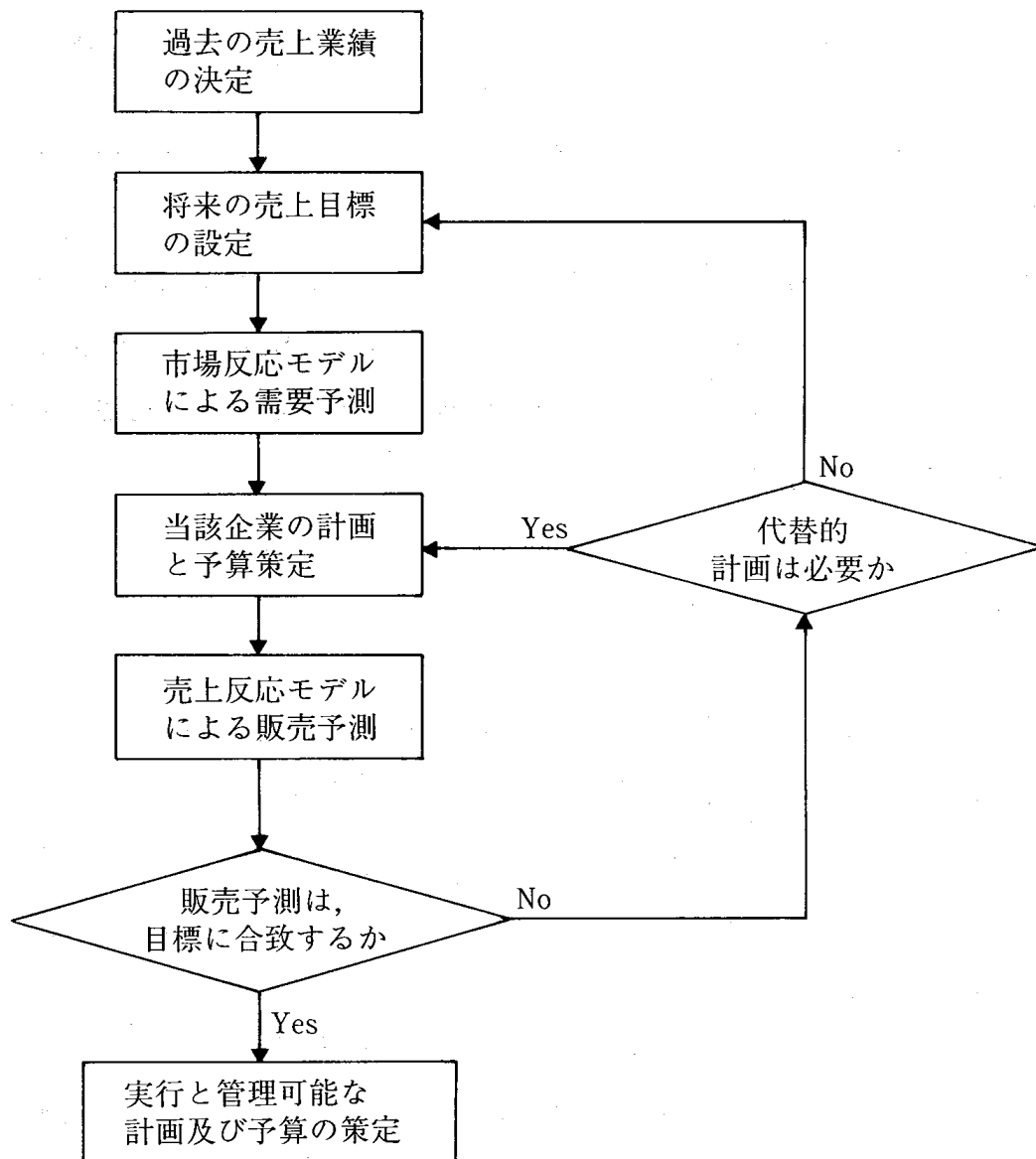


図1. 計画と予測のフロー・チャート

(注) D. M. Hanssens, L. J. Parsons, R. L. Schultz (1990), "Market Response Models: Economic And Time Series Analysis", Kluwer Academic Publishers, P18.

し、より精度の高い予測に挑戦したいためである。特に、最近の市場環境変化の不透明性は、計画の策定や目標の設定に予測が連鎖するゆえ、予測精度の向上がいやがうえにも重要な課題にならざるを得ない。図1は、近年多くの企業に見られる計画策定プロセスと予測の位置付けを示したものである。

図1からも、実行可能な計画や予算を合理的かつ効果的に策定するには、精度の高い予測値算出の意義は大きいことが理解されよう。この点は、特に、向う1カ年以内の短期予測について強調できよう。

高度情報化社会を反映してか、予測の精度は予測モデルの質の関数であるとの見解も多くの企業で支持されている。したがって、個別の最良モデルを選択する場合には、予測担当者は選ばれなかったモデルに内在する有益な知見を捨ててしまう可能性も高いであろう。それゆえ、予測値合成の方法は、情報の最大有効利用という公理に基づいて構築されると云えよう。R. L. Winkler¹⁾は、「2種あるいはそれ以上の方法から生成された合成的な予測は、個別の方法からの予測よりも正確になるのは当然である。一般的に云って、予測値の合成というアイディアは、予測の実践において推薦するだけの価値がある」と述べている。

予測値合成法は、たとえば時系列値に基づく個別のアプローチに制約されないという利点も有している。有益な情報をできる限り考慮したいならば、前述のように、異なる情報源から得られる予測値を事前情報として活用すべきと考える。たとえば、時系列モデルと市場反応モデルに基づくもの、さらに企業内の専門家による主観的な予測値を合成するといったアプローチも十分実践性を有するかもしれない。特に、最近では、重要なマーケティング意思決定に、経営者を含めた単なる主観的予測値同志を合成するアプローチが、意外な成果をあげている事実注目すべきであろう。いわゆる客観性主導型予測と判断主導型予測の合成は、時代の要請と共に見通しの明るい概念と云えるであろう。

2 ベイジアン・アプローチ

ベイジアン・アプローチは、予測値合成に関して有効に機能すると云われており、経営者やマーケティング・マネジャー、とりわけ洞察力や直観力にたけた意思決定者が容易に活用できる利点を有している。需要予測や販売予測に意思決定者の主観確率を導入するには、慎重に取扱う必要がある。従来、ベイジアン意思決定理論に用いられてきた主観確率は、将来に不確実性を伴う事象と以下に示すような活用上の局面が対象となる。²⁾

- (1) マーケティング問題に限定しても、意思決定上のテーマには1回限りで繰返しのきかないものも多い。この場合、必然的に客観的なデータの利用は不可能となる。したがって、マーケティングに関する正当な分析を試みる場合に、客観的な確率を尺度として使用することができない。
- (2) 主観確率の使用は、意思決定者が決定を下す場合に、多くのデータを正しく意思決定モデルへ結びつけることができる、換言すれば、市場の知識、顧客の反応などは、意思決定者が割当てた主観確率に要約することができる。
- (3) 主観確率を用いる分析では、それが真実であるか否かは別として、自然の状態 (state of nature) に関する意思決定者の明確な信念や成果の価値などについて、一貫した意思決定に到達しうる。

いずれにしても、0から1までの小数を取る主観確率で、その決定によって起こりうる結果に割当てたことは、かかる結果が起こるであろうという確信の度合いを反映する。以上のように、マーケティングのみならず広く経営における意思決定が、演繹、記憶、分析、評価、直観といったような、高度な精神的過程が含まれる点を留意すべきである。

一方、予測方法は帰納法的な仮説であり、絶対的な真や偽はあり得ず、賭事的にアプローチが設定されることもないのである。適用範囲を決定し、仮説の本来の真実性に基づいた基準としてではなく、将来の事象に関する他の仮説よりすぐれた相対的な能力によって、主観確率を解釈すべきと考える。具体的に解釈すれば、2種の代替的な方法から得られた F_1 , F_2 の予測値が

あり、絶対的な予測誤差に関して、 F_1 が F_2 よりも比較的小さければ、前者の予測方法は後者のそれよりも優れていると考えることもできよう。この考

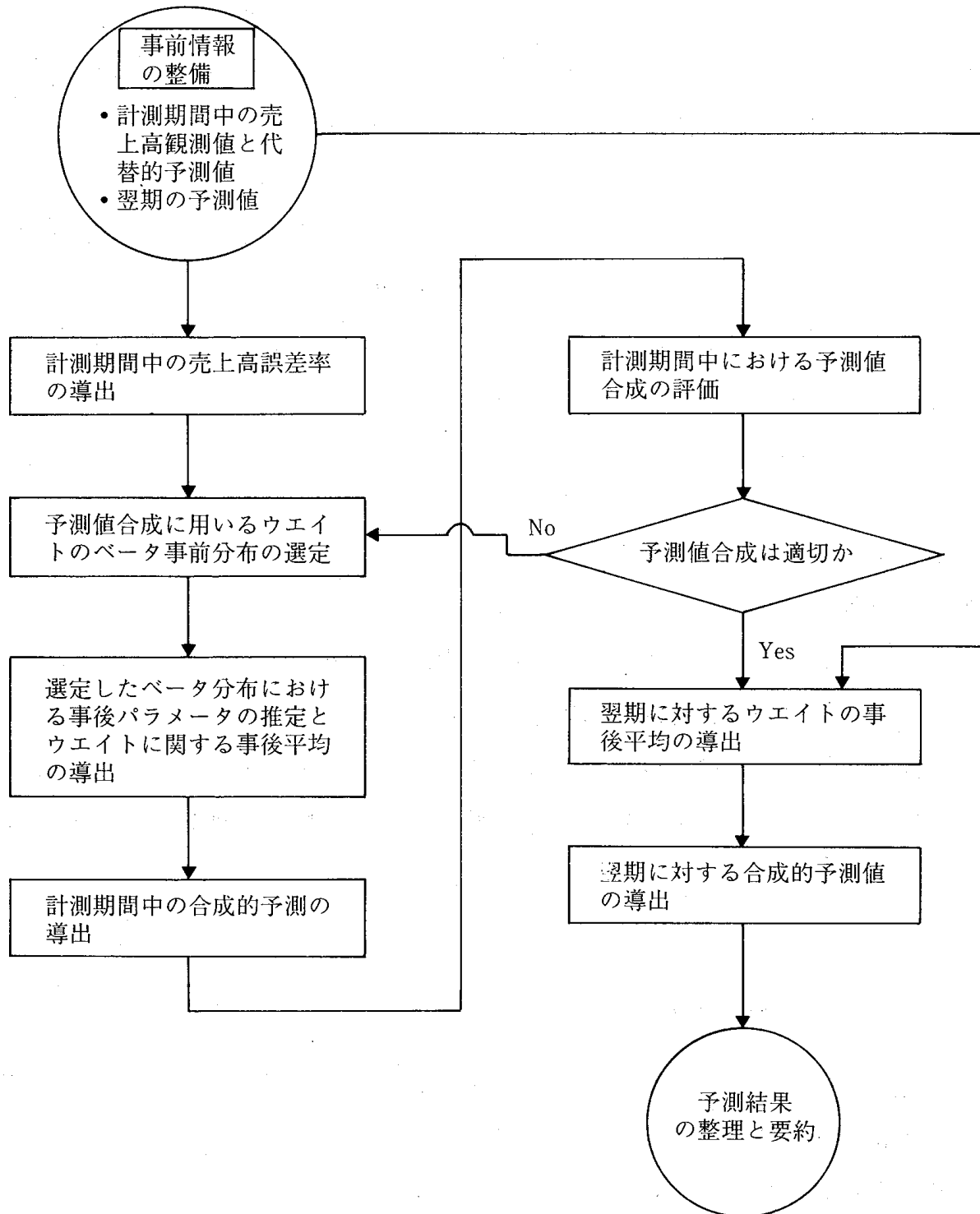


図2. ベイズ法・アプローチに基づく予測値合成法のフロー・チャート

え方を導入すると、2種の予測方法については、主観的確率分布は F_1 が F_2 に優先すると評価できよう。

ベイジアン・アプローチによる予測値合成の有効性が経験主義の代替として発揮されるためには、事前の合理性が十分考慮されなければならない。図2は、事前情報としての代替的な2種の予測値が与えられたとき、ベイジアン・アプローチによる重み付き予測値合成の主要なプロセスを図示したものである。

当該アプローチは、10種のプロセスから構成されており、予測値合成におけるウエイトの分布にベータ事前分布が採用されている点と、分布の形の選定に意思決定者の判断が加わる点に特徴が見られる。これら2つの特徴は、代替的予測値が2種以上になっても同様である。

通常のベイジアン意思決定の問題と異なり、意思決定者の主観的判断が持込まれるのは、ベータ事前分布の形を採用する際に限定される。この主観性についても、Winklerの研究³⁾成果が示すように、計量的方法に対する学習効果の貢献が期待されるところである。

ベイジアン・アプローチは、代替的予測値の加重平均に用いる合理的なウエイトを提供する。合理的な帰納法的推論が分析期間におけるあらゆる情報と仮説を利用したもので成り立つならば、ベイジアン・アプローチはヒューリスティックと云うよりはむしろ、将来に関する合理的な推論を有効に形式化したものと云えるかもしれない。

3 ベータ分布の活用

上述の考え方を背景として、2種の異なる方法から得られた代替的予測値をいかに合成するかを検討する。予測値合成に用いるウエイトを、ここでは w で与える。都合のよいことに、ウエイト w が、 a_1, a_2 を正の実数として、 $B(w | a_1, a_2)$ のベータ分布 (beta distribution) にしたがうとみなせうる。ベータ分布は連続型変数の確率分布の一種であり、その確率密度関数は、 $0 \leq w$

≤ 1 の下で、次のように示される。

$$P(w) = [B(a_1, a_2)]^{-1} w^{a_1-1} (1-w)^{a_2-1} \quad (1)$$

$$B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)} \quad (2)$$

ウエイト w に関しては、

$$E(w) = \frac{a_1}{a_1+a_2} \quad (3)$$

$$Var(w) = \frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2 (a_1+a_2+1)} \quad (4)$$

であり、2項分布の部分和としての意味をもつ。当該分布の現われ方は、パラメータ a_1, a_2 の値により、図3に見るように、U字型、L字型、長方形型など種々の形を取ることが知られている。

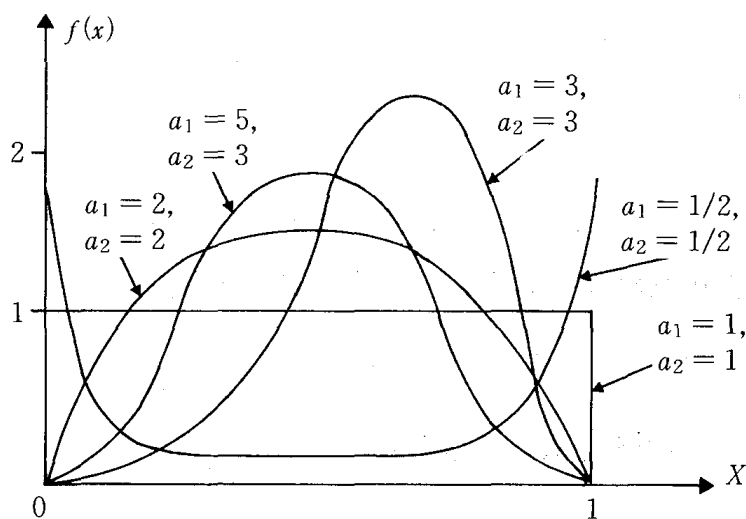


図3. ベータ分布の形状

いま、2種の予測 F_1, F_2 が実行された下では、新しいデータ・アイテム δ は、

- ① $\delta = 1$ ならば、 F_1 は F_2 よりも優れており、
- ② $\delta = 0$ ならば、 F_1 は F_2 よりも優れていない、

という事象を表現する。換言すれば、 δ は、ベルヌーイ変数の 1 つであると見做しうる。 j 個の予測が実現した下では、ウエイト w の事後分布 (posterior distribution) は、

$$B[w \mid a_1 + s_j, a_2 + j - s_j] \quad (5)$$

で与えられることが知られている。ただし、

$$s_j = \sum_{i=1}^j \delta_i \quad (6)$$

である。ウエイト w の誤差に 2 次損失の前提 (assumption of quadratic loss) をおくと、予測方法 F_1, F_2 の予測値合成に要する最適ウエイト w^0 は、次式で導出される。

$$w^0(F_1) = \bar{w} \quad (7)$$

$$w^0(F_2) = 1 - \bar{w} \quad (8)$$

ここに、 \bar{w} は、いわゆる事後平均 (posterior mean) に相当する。 j 個の予測結果が所与のとき、事後平均 \bar{w} は、

$$\bar{w} = \frac{a_1 + s_j}{a_1 + a_2 + j} \quad (9)$$

で与えられる。一般的に、ベータ分布は、ベイジアン・アプローチにおいて、2 項分布の自然共役事前分布としてよく用いられている。

4 3 種以上の予測方法への応用

次に、予測方法が n 種 ($n \geq 3$) の場合に、予測値の合成をいかに行うかの問題に移る。 i 番目の予測法 (ただし、 $1 < i < n$ として) に関して、ウエイトとしての主観確率 w_i が、それ以外の $n - 1$ 個の方法よりも優れたものであると、意思決定者が確信している場合を考える。

このとき、ベクトル w_1, w_2, \dots, w_n は、次のような確率密度関数をもつことが知られている。すなわち、

$$P[w_1, w_2, \dots, w_n] = \left[\frac{\Gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{\prod_{i=1}^n \Gamma a_i} \right] \left[\prod_{i=1}^n w_i^{a_i-1} \right] \quad (10)$$

ただし,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (11)$$

であり, a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は, 正の実数を取るものとする。 w_i の事後平均 \bar{w}_{ij} は, 事象 j (j 種の異なる方法による予測値) が生起した下では,

$$\bar{w}_{ij} = \frac{a_i + s_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^n a_i + j \right)} \quad (12)$$

で導出される。ここで, s_{ij} は, j 個の事象の内, 方法 i が他のすべての方法よりも優れている回数を示す。

企業における予測活動の実践性を考えると, (5)式に見るベータ・プロセスに基づいて予測方法 i の相対的確率を評価し, 引続き予測方法 $i+1$ に修正を試みる方が, より理解しやすいであろう。かかる相対的主観確率を, ここでは, \bar{P}_i で与える。予測値合成における一対の方法 i および $i+1$ に対応するウエイトは, \bar{P}_i および $1 - \bar{P}_i$ で表現されることになる。かくて, 正規化されたウエイト \bar{w}_i は,

$$\bar{w}_i = \frac{\bar{P}_i}{S} \quad (13)$$

で, 簡単に求められる。なお, S は, 優先を許した予測の部分集合である。したがって,

$$\bar{w}_i = \frac{\bar{P}_i}{S} \prod_{k=1}^{i-1} \left[\frac{1 - \bar{P}_k}{\bar{P}_k} \right] \quad (14)$$

となる。 $\sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1$ であるから, 上記(14)式は,

$$\frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1 \quad (15)$$

であり, 結局のところ正規化のためには, 次式が必要となるのである。

$$S = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \quad (16)$$

5 実 施 例

ここでは、上述のベイジアン・アプローチによる予測値合成の数値例を2例ほど取りあげる。すなわち、代替的予測方法 n が、 $n = 2$ の場合と $n \geq 3$ の場合である。

5-1 予測方法が2種の場合の実施例

表1は、N社のある機械用消耗財に関する販売数量と、2種の単純な回帰モデル（トレンドによる線型回帰と、自己回帰モデルの両者）から導出した販売数量の推定値を示している。1993年度の販売量をこれら2種のモデルで予測したとき、ベイジアン・アプローチを用いた予測値合成を行なう。アプローチの実際は、手順をもって示す。

表1 予測値合成のための各種データ

(単位：トン，%)

年度	売上高実績値	売上高予測値		予 測 誤 差		誤 差 率	
	Y_t	$\hat{Y}_t^{(1)}$	$\hat{Y}_t^{(2)}$	$e_t^{(1)}$	$e_t^{(2)}$	$u_t^{(1)}$	$u_t^{(2)}$
1985	680	698.5	687.9	-18.5	-7.9	2.721	1.162
1986	718	719.7	713.3	-1.7	4.7	0.236	0.655
1987	752	741.0	745.6	11.0	6.4	1.463	0.851
1988	771	762.3	774.5	8.7	-3.5	1.128	0.454
1989	797	783.5	790.6	13.5	6.4	1.694	0.803
1990	812	804.7	812.7	7.3	-0.7	0.899	0.086
1991	821	826.0	825.4	-5.0	-4.4	0.609	0.534
1992	832	847.3	833.0	-15.3	-1.0	1.839	0.120
合計	6,183	6,183.0	6,183.0	0.0	0.0	—	—

[手順1] 代替的モデルによる計測結果を整理する。

計測結果は、表2に見る通りである。これらに対する説明は、不要と思わ

れるので省略する。

なお、モデル別の誤差率 $U_t^{(i)}$ ($i = 1, 2; t = 1, 2, \dots, 8$) は、次式で導出した。

$$U_t^{(i)} = \frac{Y_t - \hat{Y}_t^{(i)}}{Y_t} \times 100.0 \quad (\%) \quad (17)$$

ここに、

Y_t : t 時点の販売数量による観測値

$\hat{Y}_t^{(i)}$: t 時点のモデル別販売数量に関する推定値 (内挿値),
をそれぞれ示す。

計測期間数 8 年間の内で、誤差率の大小で見る限り、自己回帰モデルが劣る結果を示したのは、表 1 に見る通り 1985 年度のみとなっている。

[手順 2] 1993 年度の予測を行なう。

結果のみを示すと、第 1 のトレンドによる回帰モデルでは 868.5 トン、第 2 の自己回帰モデルでは 842.4 トンと、後者の方法の方が若干低目の数値となっている。ちなみに、対前年の伸び率で見れば、前者は 4.4% 増、後者は 1.3% である。

[手順 3] 合成的予測におけるウエイトの事前分布を選定する。

ここでは、まず 1985 年度の初期時点に対して、2 種のベータ分布を仮定する。第 1 の分布は $B(w \setminus 1, 1)$ 第 2 の分布は $B(w \setminus 5, 50)$ を選択する。前者を

表 2 点測結果の要約表

区 分	計 測 結 果	モデルの 標準誤差 s	自由度修正済 決定係数 R^2	t 統計量	ダービン・ワトソン d 統計量	ダービンの h 統計量
トレンド 1 次式	$\hat{Y}_t = 677.25 + 21.25000t$ (2.02685)	13.13551	0.93961	10.48425**	—	—
自己回帰式	$\hat{Y}_t = 135.90568 + 0.84915Y_{t-1}$ (0.03471)	5.75282	0.98842	24.46413**	2.16551	-0.23521
考 備	(注 1) 回帰係数の下に見る () 内の数値は、係数の標準誤差を示す。 (注 2) 計測期間は、1985~1992 年度の 8 年間で、 $t = 1 = 1985$ 年度を示す。 (注 3) t はトレンドを指し、 $t = 1, 2, 3, \dots, 8$ である。 (注 4) 1984 年度の販売数量は、650 トンである。					

採用するのは、ウエイト w に関して拡散事前分布 (diffuse prior distribution) を評価することと同義であり、2 種の予測方式に対して等しいウエイトを付与することになる。一方、後者はより非対称な分布を好む意思決定者の判断を、われわれが考慮したためである。 $B(w \setminus 5, 50)$ という分布の下では、 \bar{w} は約 0.091 になる。すなわち、(3) 式より、

$$\begin{aligned}\bar{w} &= E(w) \\ &= \frac{a_1}{a_1 + a_2} \\ &= \frac{5}{5 + 50} \\ &= 0.091\end{aligned}\tag{18}$$

である。

[手順 4] 計測期間中の当該分布の事後パラメータ a_1 , a_2 と事後平均 \bar{w} を導出する。

たとえば、1986 年度については、 $B(w \setminus 1, 1)$ に対して、(6) より、

$$\begin{aligned}s_1 &= \delta_1 \\ &= 0\end{aligned}\tag{19}$$

となる。 $s_1 = 0$ とは、1985 年度の予測の誤差率が、 $U_1^{(1)} = 2.721$, $U_1^{(2)} = 1.162$ であるから、データ・アイテム δ_1 は 0 の値を取ることに由る。したがって、 a_1 , a_2 の値は、

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 + s_1 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= a_2 + 1 - s_1 \\ &= 1 + 1 - 0 \\ &= 2\end{aligned}\tag{21}$$

ここで、(20) 式と (21) 式に見る a_1 , a_2 について、左辺は事後パラメータ、右辺は事前パラメータをそれぞれ意味している。以上により、事後平均 \bar{w} は、

(9)式を用いて,

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{a_1 + s_1}{a_1 + a_2 + 1} \\ &= \frac{1 + 0}{1 + 1 + 1} \\ &= 0.333\end{aligned}\tag{22}$$

となる, ただし, 上記の a_1, a_2 は, 事前パラメータである点に留意すべきである。

同様に, 1987年度は, 前年度の誤差率が $U_2^{(1)} < U_2^{(2)}$ となるゆえ, δ_2 の値が1を取ることに由る。事後パラメータ a_1, a_2 は,

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 + s_2 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= a_2 + 1 - s_2 \\ &= 2 + 1 - 1 \\ &= 2\end{aligned}\tag{24}$$

である。事後平均 \bar{w} は,

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{1 + 1}{1 + 2 + 1} \\ &= 0.500\end{aligned}\tag{26}$$

となる。かかる計算を逐次実施し, 最終1992年度まで各年度毎に \bar{w} を導出することになる。

ちなみに, 1992年度の事後パラメータ a_1, a_2 は, $a_1 = 2, a_2 = 7$ となるゆえ, $\bar{w} = 0.222$ と導出される。 $B(w \mid 5, 50)$ に対しても同様のアプローチを取ることに由り, 表3が得られる。

計測期間中の合成的予測は, 次式で行なう。

$$\hat{Y}_t^{(c)} = \bar{w}_t \hat{Y}_t^{(1)} + (1 - \bar{w}_t) \hat{Y}_t^{(2)}\tag{27}$$

ここに,

$\hat{Y}^{(c)}$: 加重平均に基づく
合成的予測値

$\hat{Y}^{(1)}$: 代替的予測方式1
(トレンドによる
回帰モデル) による
予測値

$\hat{Y}^{(2)}$: 代替的予測方式2
(自己回帰モデル) による予測値

t : 時点 ($t = 1, 2, \dots, 8$)

たとえば, $B(w \setminus 1, 1)$
に関して, 1985年度, 1986
年度などは, 次のように導
出する。

$$\hat{Y}_1^{(c)} = \bar{w}_1 \hat{Y}_1^{(1)} + (1 - \bar{w}_1) \hat{Y}_1^{(2)} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= (0.500) (698.5) \\ &+ (1 - 0.500) (687.9) \\ &= 693.2 (\text{トン}) \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_2^{(c)} &= \bar{w}_2 \hat{Y}_2^{(1)} \\ &+ (1 - \bar{w}_2) \hat{Y}_2^{(2)} \\ &= (0.333) (719.7) \\ &+ (1 - 0.333) (713.3) \\ &= 715.4 (\text{トン}) \quad (30) \end{aligned}$$

その他の年度別計算も, 上
記と同様の手続きにより導

表3 計測期間中の合成的予測値とそのウェイト

年度	売上高実測値 Y_t	売上高予測値		予測誤差		誤差率(%)		事前分布 $B(w \setminus 1, 1)$		ウェイト		合成的予測値		合成的予測値 $\hat{Y}_t^{(c)}$	ウェイト \bar{w}	事前分布 $B(w \setminus 5, 50)$	合成的予測値 $\hat{Y}_t^{(c)}$
		$\hat{Y}_t^{(1)}$	$\hat{Y}_t^{(2)}$	$e_t^{(1)}$	$e_t^{(2)}$	$u_t^{(1)}$	$u_t^{(2)}$	a_1	a_2	\bar{w}	\bar{w}	$\hat{Y}_t^{(c)}$	$\hat{Y}_t^{(c)}$				
1985	680	698.5	687.9	-18.5	-7.9	2.721	1.162	1	1	0.500	0.091	693.2	688.9				
1986	718	719.7	713.3	-1.7	4.7	0.236	0.655	1	2	0.333	0.089	715.4	713.9				
1987	752	741.0	745.6	11.0	6.4	1.463	0.851	2	2	0.500	0.105	743.3	745.1				
1988	771	762.3	774.5	8.7	-3.5	1.128	0.454	2	3	0.400	0.103	769.6	773.2				
1989	797	783.5	790.6	13.5	6.4	1.694	0.803	2	4	0.333	0.102	788.2	789.9				
1990	812	804.7	812.7	7.3	-0.7	0.899	0.086	2	5	0.286	0.100	810.4	811.9				
1991	821	826.0	825.4	-5.0	-4.4	0.609	0.534	2	6	0.250	0.098	825.6	825.5				
1992	832	847.3	833.0	-15.3	-1.0	1.839	0.120	2	7	0.222	0.097	836.2	834.4				
1993	-	868.5	842.4	-	-	-	-	2	8	0.200	0.095	847.6	844.9				
備考	$B(w \setminus 1, 1)$ を使用した場合の MSPE は 5.49×10^{-5} , $B(w \setminus 5, 50)$ のときの MSPE は 3.60×10^{-5} である。																

出される。

[手順6] 1993年度の予測値合成を行なう。

予測値時点における事後パラメータ a_1 , a_2 を, まず求める。前述(6)を用いて,

$$\begin{aligned} s_8 &= \sum_{i=1}^8 d_i \\ &= 1 \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

(1) $B(w \setminus 1, 1)$ の場合

事後パラメータ a_1 と a_2 は,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + s_8 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2 + 8 - s_8 \\ &= 1 + 8 - 1 \\ &= 8 \end{aligned} \quad (33)$$

となる。したがって, 期間数を T と書けば, 事後平均 \bar{w}_{T+1} は,

$$\begin{aligned} \bar{w}_{T+1} &= \frac{a_1 + s_8}{a_1 + a_2 + 8} \\ &= \frac{1 + 1}{1 + 1 + 8} \\ &= 0.200 \end{aligned} \quad (34)$$

である。以上により, 1993年度の合成的予測 $\hat{Y}_{T+1}^{(c)}$ は, 次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{T+1}^{(c)} &= \bar{w}_{T+1} \hat{Y}_{T+1}^{(1)} + (1 - \bar{w}_{T+1}) \hat{Y}_{T+1}^{(2)} \\ &= (0.200)(868.5) + (1 - 0.200)(842.4) \\ &= 847.6 \text{ (トン)} \end{aligned} \quad (35)$$

(2) $B(w \setminus 5, 50)$ の場合

事後パラメータ a_1 と a_2 は,

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + s_8 \\
&= 5 + 1 \\
&= 6
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_2 + 8 - s_8 \\
&= 50 + 8 - 1 \\
&= 57
\end{aligned} \tag{37}$$

となる。事後平均 \bar{w}_{T+1} は、

$$\begin{aligned}
\bar{w}_{T+1} &= \frac{a_1 + s_8}{a_1 + a_2 + 8} \\
&= \frac{5 + 1}{5 + 50 + 8} \\
&= 0.095
\end{aligned} \tag{38}$$

である。したがって、販売予測 $\hat{Y}_{T+1}^{(c)}$ は、

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{T+1}^{(c)} &= \bar{w}_{T+1} \hat{Y}_{T+1}^{(c)} + (1 - \bar{w}_{T+1}) \hat{Y}_{T+1}^{(c)} \\
&= (0.095)(868.5) + (1 - 0.095)(842.4) \\
&= 844.9 \text{ (トン)}
\end{aligned} \tag{39}$$

となる。以上が、意思決定者が選定した2種の異なるベータ分布に基づく翌期の合成的予測である。

[手順7] 予測値の選択を行なう。

2種の予測値が得られたので、二者択一の立場から、いずれを選択するかの問題にふれておく、翌期という短期予測を対象としているので、ここでは計測期間中の平均2乗予測誤差 MSPE (Mean Square Predicted Error) を採用する。MSPE は、次式で導出される。

$$\begin{aligned}
[\text{MSPE}] &= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2 \\
&= (\bar{P} - \bar{A})^2 + (1 - \hat{\beta}_1) s_p^2 + (1 - r_{PA}^2) s_A^2
\end{aligned} \tag{40}$$

なお、

$$A_t = \left[\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 \right] \times 100 (\%) \quad (41)$$

$$P_t = \left[\frac{\hat{Y}_t^{(c)}}{Y_{t-1}} - 1 \right] \times 100 (\%) \quad (42)$$

で与えられる実績と予測の変化率を示す。 $\hat{\beta}_1$ は、 A_t 系列と P_t 系列との線型関係を想定した場合の回帰係数である。

$$A_t = \beta_0 + \beta_1 P_t \quad (43)$$

r_{PA}^2 は、上記 2 種の系列に関する相関係数の 2 乗値、 s_A^2 は A_t 系列の分散、 s_P^2 は P_t 系列の分散をそれぞれ示している。 U^M , U^R , U^D を、下記に定義する。

$$U^M = \frac{(\bar{P} - \bar{A})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2} \quad (44)$$

$$U^R = \frac{(1 - \hat{\beta}_1)^2 s_P^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2} \quad (45)$$

$$U^D = \frac{(1 - r_{PA}^2) s_A^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2} \quad (46)$$

当然のことながら、

$$U^M + U^R + U^D = 1 \quad (47)$$

となる。上記の内容は予測誤差の成分分解であり、この詳しい内容については別紙⁴⁾で説明済ゆえ、表 4 に示した結果について概説するにとどめる。

表 4 計測期間中の予測精度の比較表

予測誤差の構成成分		$B(w \setminus 1, 1)$ の場合	$B(w \setminus 1, 50)$ の場合
平均値の相違分	(U^M)	16.70	10.08
回帰係数の不良分	(U^R)	14.39	36.02
回帰の乱れによる分	(U^D)	68.91	53.90
平均 2 乗予測誤差 (MSPE)	構成比	100.00 (%)	100.00 (%)
	総 量	5.49×10^{-5}	3.60×10^{-5}

$B(w \setminus 1, 1)$ の場合, $[\text{MSPE}]^{(1)} = 5.49 \times 10^{-5}$, $B(w \setminus 5, 50)$ では, $[\text{MSPE}]^{(2)} = 3.60 \times 10^{-5}$ であり, 後者のベータ分布を採用した方が若干予測誤差が小さくなっている。予測誤差の構成成分を見ると, 前者の分布では平均値の相違分が16.70%, 回帰係数の不良分14.39%, 回帰の乱れ分68.91%であるのに対し, 後者では平均値の相違分10.08%, 回帰係数の不良分36.02%, 回帰の乱れ分53.90%となっている。総合すれば, 市場構造や販売活動の内容に大きな変化がなければ, $B(w \setminus 5, 50)$ を採用したときの合成的予測が優先されることは許されるといえよう。予測値 $\hat{Y}_{T+1}^{(c)} = 844.9$ (トン) であり, この値は前年度の販売量の1.55%増に相当する。

5-2 予測方法が4種の場合の実施例

第2の実施例として, M社のあるプラスチック製品に関する1984年度から

表5 ベイジアン法による予測値合成に用いるデータ

年 度	売上高実績値	4 種の予測方法による推定値 (10^3 トン)			
	Y_t	$\hat{Y}_t^{(1)}$	$\hat{Y}_t^{(2)}$	$\hat{Y}_t^{(3)}$	$\hat{Y}_t^{(4)}$
1983	96	95	92	102	87
1984	117	114	120	123	109
1985	148	150	143	147	151
1986	180	173	184	182	178
1987	223	215	224	240	216
1988	290	310	287	296	283
1989	367	363	359	358	371
1990	441	440	436	438	452
1991	573	582	585	572	573
1992	775	768	780	752	790
翌年の予測値	896	875	893	920	910

1992年度までの販売数量について、異なる4種の予測方法から得られた内挿値と翌年度の予測値を用いたアプローチを展開する。データは、表5に見る通りである。

具体的展開は、前述と同様に、主要な手順を追って示す。

〔手順1〕 予測方法の優先性に対する主観確率を求める。

表5に見る予測方法別の誤差率の絶対値を参照して、 \bar{P}_i を導出する。まず、 $\hat{Y}_t^{(1)}$ と $\hat{Y}_t^{(2)}$ を比較することになる。1983年度の初期時点における多変量ベータ分布(Dirichlet distributionとして知られている)を、 $B[w_1, \dots, w_4 \setminus 1, \dots, 1]$ と仮定する。 $T=10$, $a_1=1$, $a_2=1$ である。 $\hat{Y}_t^{(1)}$ と $\hat{Y}_t^{(2)}$ を実績値に対して評価すると、 $s_j=5.5$ となる。このとき、1984年度において、両者の誤差率の絶対値が等しくなるゆえ、便宜的に、予測方法1に0.5を付与した点に留意してほしい。したがって、事後分布は前述(5)式により、 $B[P_1 \setminus 6.5, 5.5]$ になる。(9)式より、

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= \frac{1+5.5}{1+1+10} \\ &= \frac{6.5}{12} \\ &= 0.542\end{aligned}\tag{48}$$

$$\begin{aligned}1-\bar{P}_1 &= 1-0.542 \\ &= 0.458\end{aligned}\tag{49}$$

となる。同様に、 $\hat{Y}_t^{(2)}$ と $\hat{Y}_t^{(3)}$ を比較して、 $\bar{P}_2=0.583$, $\hat{Y}_t^{(3)}$ と $\hat{Y}_t^{(4)}$ を比較して、 $P_3=0.542$ を得る。

〔手順2〕 優先を許した予測の部分集合Sを求める。

(14)式を用いて、

$$\begin{aligned}S &= \bar{P}_1 + \bar{P}_1 \left[\frac{1-\bar{P}_1}{\bar{P}_1} \right] + \bar{P}_1 \left[\frac{1-\bar{P}_1}{\bar{P}_1} \right] \left[\frac{1-\bar{P}_2}{\bar{P}_2} \right] \\ &\quad + \bar{P}_1 \left[\frac{1-\bar{P}_1}{\bar{P}_1} \right] \left[\frac{1-\bar{P}_2}{\bar{P}_2} \right] \left[\frac{1-\bar{P}_3}{\bar{P}_3} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.542 + 0.458 + 0.327 + 0.276 \\
&= 1.603
\end{aligned} \tag{50}$$

となる。

[手順3] 正規化されたウエイト $\bar{w}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ を求める。

結果は、下記のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \frac{P_1}{S} \\
&= \frac{0.542}{1.603} \\
&= 0.338
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_2 &= \frac{1}{S} \left[\frac{\bar{P}_1 (1 - \bar{P}_1)}{\bar{P}_1} \right] \\
&= \left(\frac{1}{1.603} \right) \left[\frac{0.542 (1 - 0.542)}{0.542} \right] \\
&= 0.286
\end{aligned} \tag{52}$$

同様に、 $\bar{w}_3 = 0.204$, $\bar{w}_4 = 0.172$ を得る。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \bar{w}_i &= 0.338 + 0.286 + 0.204 + 0.172 \\
&= 1.000
\end{aligned} \tag{53}$$

である。

[手順4] 翌期の販売予測を行なう。

手順3で求めたウエイトを用いて、合成的予測 $\hat{Y}_{T+1}^{(c)}$ を導出する。なお、4種の異なる方法による1993年度の個別の予測値 $\hat{Y}_{T+1}^{(i)}$ は、 $\hat{Y}_{T+1}^{(1)} = 875$, $\hat{Y}_{T+1}^{(2)} = 893$, $\hat{Y}_{T+1}^{(3)} = 920$, $\hat{Y}_{T+1}^{(4)} = 910$ となっている。したがって、

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{T+1}^{(c)} &= (0.338)(875) + (0.286)(893) + (0.204)(920) + (0.172)(910) \\
&= 895.348 \\
&\simeq 895 \text{ (10}^3 \text{ トン)}
\end{aligned} \tag{54}$$

となる。

[手順5] 予測結果を評価する。

1993年度における当該製品の予測の実現値 $\hat{Y}_{T+1}^{(A)}$ は、 $\hat{Y}_{T+1}^{(A)} = 896$ (10³トン) である。したがって、合成的予測値と個別の予測値を誤差率の点から評価しておく。表6は、予測方式別の誤差率の大きさと、優劣のランクを示したものである。

表6 1993年度に関する誤差率から見た販売予測の評価表

予測方式	予測誤差率 (%)	優先ランキング	対前年成長率 (%)
方法1	2.344	4位	+12.90
方法2	0.335	2位	+15.23
方法3	-2.679	5位	+18.71
方法4	-1.563	3位	+17.42
予測値合成法	0.112	1位	+15.48

誤差率の小さい予測ほど望ましいという判定を受入れれば、ベイジアン法による合成的予測が誤差率0.112%で優先ランク1位、第2位は予測方法2で誤差率が0.335%となっており、第1位と遜色のない結果を呈している。以下、順に方法4、方法1と続き、方法3は-2.679%と誤差率が最も高くなっている。予測値合成におけるこの種のベイジアン・アプローチは、ウエイトに関する事前分布を種々変化させることによるシミュレーションが可能なため、予測の代替案を容易に提示できる利点を有している点も見逃せない。

6 専門家のコンセンサスによる予測

ベイジアン法による予測値合成法は、予測値成生の中枢が人間の判断におかれている場合にも活用できる。企業における需要予測や販売予測に、社内の複数の専門家から構成されるワーキング・グループが関与する場合も少なくない。予測値導出の典型は、1人1人の専門家が提示した個別の予測値をグ

ループ・メンバーのコンセンサス (consensus) が得られるように調整し、最終的に、たとえば、単純合成を行なって単一の予測値を生成するといったアプローチである。技術革新が想定される場合の生産財や耐久消費財の需要予測、強力な大手企業の市場参入が確実視される場合の非耐久消費財の販売予測など、近未来の市場環境にユニークな変化が考えられる場合に、当該アプローチは頻度多く採用されている。上記のようなアプローチを統計的にいえば、専門家が判断した予測値に対する不確実性の確率分析を結合し、推論や意思決定の基礎情報たりうるような単一のコンセンサス分布 (single consensus distribution) をいかにつくりあげるかの問題に帰着する、複数の専門家から得られる数量的情報のもつ特徴は、情報相互間に相関性があるか否かの可能性にあり、かかる相関性が認められる場合も考慮したアプローチが展開される。

ベイジアン・アプローチの枠組において、不確実性の量的判断というものは、統計的推論や意思決定の技法にとって、不可決のインプットを形成する。予測の実際では、意思決定者が自己の関心のあるパラメータについて、確信のもてる知識を十分もち合わせていない場合も多いであろう。かかる状況下で、意思決定者は複数の専門家に相談し、主観的確率分布という形式をふんで数量的判断を下すことになる。当該プロセスが採用されると、意思決定者は専門家が評価した複数の分布を結合し、正当なベイジアン・アプローチへのインプット・データとして活用できるように、単一の分布の作成を試みるかもしれない。ベイジアン・アプローチは、サンプルの裏付けを反映する尤度関数を取入れた正式な機構と、事前情報を反映するいわゆる事前分布 (prior distribution) とで構成されており、意思決定の根拠となる事後分布 (posterior distribution) を形成するもので、そのアプローチの典型が図4に載せてある。

もしも、サンプル情報の裏付けが何もない場合には、意思決定は事前分布のみに基づいてなされることになる。意思決定者が複数の専門家を選定すると、かれらは自己の判断を背景に主観的確率分布を形成するであろう。かく

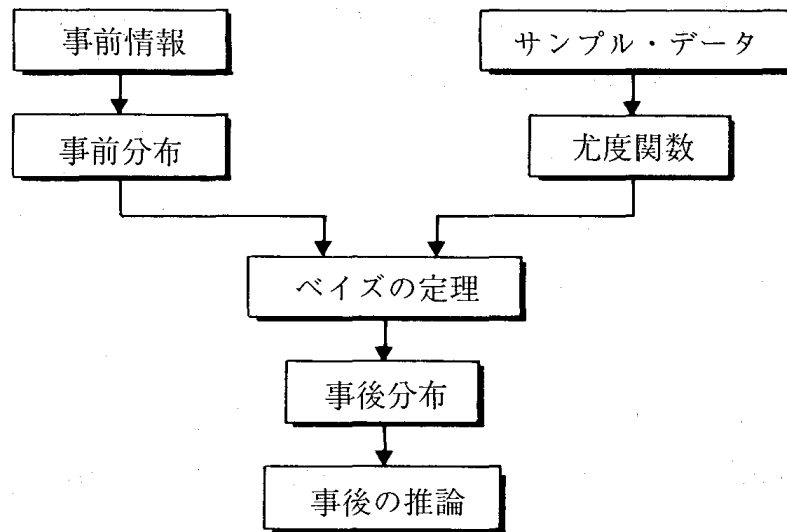


図4. ベイジアン・アプローチの典型

て、事前分布は、専門家の数に対応して存在することになる。しかしながら、分析に必要となるのは、尤度関数と結合できる単一の分布であり、これはサンプル情報の裏付けがない場合、意思決定や予測の基盤たりうる情報となる。複数の分布が専門家個個人の判断をそれぞれ表現するときは、結果として得られた単一の分布が、専門家の判断を要約した一種のコンセンサスと考えられる。これが、いわゆるコンセンサス分布（consensus distribution）と呼ばれるものである。コンセンサス分布を考察する場合、デルファイ法に見られるような情報のフィードバック、専門家グループ・メンバー間の相互作用などは検討の対象外とする。いうまでもなく、ベイズの定理（Bayes' theorem）の応用は、事前情報とサンプル情報の有機的な結合を示すものであって、ベイズ法・アプローチは、専門家のコンセンサスに関して潜在的な興味ある対象になりうるといえよう。

7 相関性のあるコンセンサス・モデル

専門家のコンセンサス・モデルを考察するに当たり、将来の観察パラメー

タになりうる変数を θ とする。 θ は連続型分布を想定し、 k 人の専門家によって査定されると仮定しよう。専門家 i が査定した確率密度関数を、 g_i で表現する。専門家 i の分布の平均値を μ_i とすると、

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} \theta g_i(\theta) d(\theta) \quad (55)$$

で与えられ、これは θ の点推定値となる。したがって、専門家 i の推定誤差 (error of estimation) ϵ_i は、

$$\epsilon_i = \mu_i - \theta \quad (56)$$

となる。 ϵ_i に対する専門家 i の密度は、 $g_i(\mu_i - \epsilon_i)$ で示される。専門家による定量的判断相互間の相関性の問題は、これらの推定誤差を対象に検討される。 f を、誤差ベクトル ϵ 、すなわち、 $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k]'$ の密度とする。意思決定者が所与の予測テーマを専門家に相談する以前には、 θ と $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]'$ は共に確率変数であり、 θ が既知であっても ϵ に関する密度は不変であるとする。その理由は、 f の関数式が θ によって観察された特定の μ に依存するのを防止するためである。 f が所与のため、 k 人の専門家からの情報は、意思決定者の θ の分布を修正するために用いられる。 $f(\mu_1 - \theta, \mu_2 - \theta, \dots, \mu_k - \theta)$ は、尤度関数として採用でき、コンセンサス分布は、拡散事前密度 (diffuse prior density) にしたがう θ の事後分布となる。

ベイジアン・アプローチは、事前情報を積極的に活用するが、事前情報のきわめて乏しいあるいはそれがまったく存在しない状況のとき、事前情報の拡散な状態と呼ぶ。コンセンサス分布は、下記のように与えられる。

$$h(\theta | g_1, g_2, \dots, g_k, f) \propto f(\mu_1 - \theta, \mu_2 - \theta, \dots, \mu_k - \theta) \dots \quad (57)$$

意思決定者が、非拡散事前密度 (non-diffuse prior density) $h_0(\theta)$ を有しているならば、事後分布は、次のように示される。

$$h(\theta | g_1, g_2, \dots, g_k, f, h_0) \propto h_0(\theta) f(\mu_1 - \theta, \mu_2 - \theta, \dots, \mu_k - \theta) \quad (58)$$

f が展開されたコンセンサス・モデルにおいて重要な役割を果たしているため、この決定は専門家をモデリングする過程では無視できないステップとなる。 f の決定に際しては、専門家が適切であると判断したデータなら、どれでも利用したいと思うのは当然である。もしも、過去の θ の値が専門家の

平均値と共に観察されるなら、誤差に関する g の観察ベクトルは、貴重な情報を提供することになるだろう。

観察された誤差ベクトルと現状の誤差ベクトルが交換可能であるならば、前者の度数分布を f の推定値として利用できよう。かかる情報が存在しない場合、意思決定者は、当然、主観的に f を査定しなければならない。

8 正規分布の導入

f の分布形態に何の制約も与えずに、モデルを実用化するのは非常に困難である。したがって、われわれになじみ深い正規分布の活用を考える。 k 個の零から成る平均ベクトルと、 $i = 1, 2, \dots, k$ に対する分散 σ_i^2 、および $i \neq j$ に対する共分散 σ_{ij}^2 から成る正値分散－共分散行列 Σ をもつ多変量正規分布が仮定される。正規性の仮定を導入することの利点は、専門家相互間の依存関係を容易に定式化できることにある。具体的には、前述の依存関係は、推定誤差の相関係数 ρ_{ij} (ただし、 $i \neq j$ とする。) によって表現可能となる。

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (59)$$

相関係数 ρ_{ij} については、単純な仮定として、たとえば、零や同等を採用することも可能である。

予測におけるアプローチの実際では、上記の正値分散－共分散行列 Σ が既知、未知のいずれかでその展開が異なる。本小冊子では、前者の場合に焦点を当てている。

9 Σ 既知の場合のアプローチ

すでに説明した正値分散－共分散行列 Σ が過去の情報から既知である場合、専門家のコンセンサスによる需要予測や販売予測の方法を以下に具体化する。併せて、簡単な実施例も取りあげる。

9-1 予測方法

θ を不適当な事前拡散密度とし、推定誤差について、平均 $[0, 0, \dots, 0]'$ 、正値分散-共分散行列 Σ を有する多変量正規分布を仮定すると、 θ の事後密度 (posterior density) は、下記のように与えられる。

$$h(\theta | \mu) \propto \phi \left[\frac{(\theta - \mu^*)}{\sigma^*} \right] \quad (60)$$

ここに、 ϕ は、標準正規確率密度関数である。 μ^* と σ^{*2} は、次式にしたがうことが知られている。すなわち、

$$\mu^* = \frac{e' \Sigma^{-1} \mu}{e' \Sigma^{-1} e} \quad (61)$$

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{e' \Sigma^{-1} e} \quad (62)$$

なお、 e は、 $e = [1, 1, \dots, 1]$ である。

コンセンサス分布の平均値 μ^* は、専門家の平均値の1次結合 $\sum_{i=1}^k w_i \mu_i$ である。

$$\mu^* = \sum_{i=1}^k w_i \mu_i \quad (63)$$

この μ^* こそ、われわれが求める予測値合成の結果を示している。ただし、 $\Sigma^{-1} = \alpha_{ij}$ のとき、ウエイト $w_i (i = 1, 2, \dots, k)$ は、

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}}{\sum_{h=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{hj}} \quad (64)$$

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1.0 \quad (65)$$

である。ウエイト合計は1となるが、すべてが正数とは限らない。たとえば、 $k = 2$ 、すなわち、専門家が2人の場合、先の(61)式と(62)式は、次のように具体化される。

$$\mu^* = \frac{(\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2) \mu_1 + (\sigma_1^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2) \mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2} \quad (66)$$

$$\sigma^{*2} = \frac{(1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2} \quad (67)$$

一般的に、 $\sigma_1 < \sigma_2$ を仮定すると、前述の(64)式では、 μ_1 は常に正のウェイトをもつことになる。しかしながら、 $\rho > \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ であるならば、 μ_2 にかかるウェイトは負になる。換言すれば、高度な相関関係があると、2種の推定値は θ と同一の符合条件を有することになる。実際、多くの場合、ウェイトは正の値をとるはずであるが、相関係数 ρ に反映される通り、専門家相互間の依存性は、 μ^* に関して重要な役割を果たしており、同様のことがコンセンサス分布についても妥当する。

9-2 若干の推理

次に、前述の(66)式と(67)式を証明しておく。 $k=2$ の場合、先の正值分散-共分散行列 Σ は、次のように表現される。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (68)$$

推定誤差に関する相関係数 ρ_{ij} は、

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (69)$$

であるから、共分散 σ_{ij} は、

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (70)$$

となる。 Σ の逆行列 Σ^{-1} は、

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(\rho_{11} \sigma_1 \sigma_1) (\rho_{22} \sigma_2 \sigma_2) - (\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2) (\rho_{21} \sigma_2 \sigma_1)} \times \begin{bmatrix} \rho_{22} \sigma_2 \sigma_2 & -\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho_{21} \sigma_2 \sigma_1 & \rho_{11} \sigma_1 \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

で表わされる。前述(61)式より、

$$\begin{aligned}
e' \Sigma^{-1} \mu &= [1 \ 1] \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\rho_{22}\sigma_2\sigma_2 - \rho_{21}\sigma_2\sigma_1}{(\rho_{11}\sigma_1\sigma_1)(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2) - (\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\rho_{21}\sigma_2\sigma_1)} \\ \frac{\rho_{11}\sigma_1\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{(\rho_{11}\sigma_1\sigma_1)(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2) - (\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\rho_{21}\sigma_2\sigma_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2 - \rho_{21}\sigma_2\sigma_1)\mu_1 + (\rho_{11}\sigma_1\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)\mu_2}{(\rho_{11}\sigma_1\sigma_1)(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2) - (\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\rho_{21}\sigma_2\sigma_1)} \quad (72)
\end{aligned}$$

推定誤差の相関係数 ρ_{ij} は, $i = j$ のとき $\rho_{ij} = 1$, $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ となる。したがって, $k = 2$ の場合, ρ_{ij} , ρ_{ji} を ρ で置換することが可能となる。よって, (72)式は, 以下のように簡約できる。

$$\begin{aligned}
e' \Sigma^{-1} \mu &= [1 \ 1] \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mu_1 + (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mu_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2} \quad (73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e' \Sigma^{-1} e &= [1 \ 1] \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\rho_{22}\sigma_2\sigma_2 - \rho_{21}\sigma_2\sigma_1}{(\rho_{11}\sigma_1\sigma_1)(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2) - (\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\rho_{21}\sigma_2\sigma_1)} \\ \frac{\rho_{11}\sigma_1\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{(\rho_{11}\sigma_1\sigma_1)(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2) - (\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\rho_{21}\sigma_2\sigma_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\rho_{22}\sigma_2\sigma_2 - \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 + \rho_{11}\sigma_1\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{(\rho_{11}\sigma_1\sigma_1)(\rho_{22}\sigma_2\sigma_2) - (\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\rho_{21}\sigma_2\sigma_1)} \quad (74)
\end{aligned}$$

先の(73)式の場合と同様に, ρ_{ij} , ρ_{ji} を ρ で置換すれば,

$$e' \Sigma^{-1} e = [1 \ 1] \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2} \quad (75)$$

が得られる。

以上により,

$$\begin{aligned} \mu^* &= \frac{e^T \Sigma^{-1} \mu}{e^T \Sigma^{-1} e} \\ &= \left(\frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mu_1 + (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mu_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2} \right) \left(\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2} \right) \\ &= \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mu_1 + (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mu_2}{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2} \quad (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \frac{1}{e^T \Sigma^{-1} e} \\ &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2} \\ &= \frac{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2} \quad (77) \end{aligned}$$

が証明されたことになる。

9-3 Σ の構成に関する実用的仮定

専門家の数 k が、たとえば業界単位での予測ワーキング・グループに見られるように、多数の参加が考えられる場合、正値分散-共分散行列 Σ のパラメータ数も増大し、 Σ^{-1} をパラメータで表現するのが厄介になってくる。そこで、専門家相互間の依存関係が与えるインパクトを考察するために、R. L. Winkler の創見による Σ に関する実用的かつ特別な仮定が意味をもつ。具体的には、 $\rho_{ij} = \rho$ (ただし、 $i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j$ とする) を考える。S. J. Press⁵⁾ による逆二項定理 (Binomial Inverse Theorem) を用いることにより、 Σ^{-1} の具体化が容易になる。結果のみを、以下に示す。

$$\mu^* = \frac{\sum_{i=1}^k \{ [1 + (k-1)\rho] \bar{\sigma}_i^{-2} - \rho \bar{\sigma}_i^{-1} \sum_{j=1}^k \bar{\sigma}_j^{-1} \} \mu_i}{\{ [1 + (k-1)\rho] \sum_{j=1}^k \bar{\sigma}_j^{-2} - \rho \left(\sum_{j=1}^k \bar{\sigma}_j^{-1} \right)^2 \}} \quad (78)$$

$$\sigma^{*2} = \frac{(1-\rho) [1 + (k-1)\rho]}{\{ [1 + (k-1)\rho] \sum_{j=1}^k \bar{\sigma}_j^{-2} - \rho \left(\sum_{j=1}^k \bar{\sigma}_j^{-1} \right)^2 \}} \quad (79)$$

ここで、ウエイト w_i は、 $\bar{\sigma}_i^{-1} < \frac{\sum_{j \neq i} \bar{\sigma}_j^{-1}}{(k-2) + \rho^{-1}}$ ならば、 $w_i < 0$ となる。この事実によって、先の公式は、相関係数 ρ が 1 に近づくにつれ、 $k-1$ 人の専門家の平均的精度よりも低い専門家 i の精度にまで情報の要約が可能であることを示している。 $\rho = 0$ ならば、ウエイト w_i は、

$$w_i = \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^k \bar{\sigma}_j^{-2}} \quad (80)$$

となる。

専門家の解釈から情報の適切な査定者という概念を取り除き、単なる情報の提供者に限定して考える方が、より現実的なアプローチが可能になるかもしれない。これまでに検討してきたモデルが情報収集のプロセスに限りなく近づいたなら、適切なコンセンサス分布は単一の正規分布であり、決して結合分布にはならない。さらに追記するならば、意思決定者が需要予測や販売予測の領域において、平均 μ' と分散 σ'^2 から成る θ の正規事前分布を考慮するなら、その事後分布 μ'' と事後分散 σ''^2 は、よく知られた次式に依存する。

$$\begin{aligned} \mu'' &= \frac{\mu' \left(\frac{\sigma^2}{k} \right) + \bar{x} \sigma'^2}{\sigma'^2 + \frac{\sigma^2}{k}} \\ &= \frac{\mu' (\sigma'^2)^{-1} + \bar{x} \left(\frac{\sigma^2}{k} \right)^{-1}}{(\sigma'^2)^{-1} + \left(\frac{\sigma^2}{k} \right)^{-1}} \\ \sigma''^2 &= \frac{\sigma'^2 \left(\frac{\sigma^2}{k} \right)}{\sigma'^2 + \frac{\sigma^2}{k}} \end{aligned} \quad (81)$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^{-1} + \left(\frac{\sigma^2}{k}\right)^{-1}} \quad (82)$$

なお、 \bar{x} はサンプル平均、 $\frac{\sigma^2}{k}$ はサンプル平均の分散を示している。

10 実 施 例

これまでに述べた内容を活用して、企業での簡単な実施例を紹介する。

H社は名古屋市内にある各種部品の中小メーカーであるが、大口顧客であるM社から新型乗用車向き部品の受注額をどの程度販売予算に計上するかをマネジメント・レベルで検討している。営業担当重役は、状況に明るい3名の企画スタッフに当該製品の年間受注額を想定するよう要請した。その結果が、表7に載せてある。

表7 平均受注金額と予測誤差の分散に関する見積り

企画スタッフ	年間平均受注金額 (10 ³ 万円)	予測誤差の分散
A 氏	61.0	36
B 氏	62.5	25
C 氏	70.0	49

営業担当重役は、3人のスタッフについて判断プロセスが万全であると考え、過去の業績に基づいて、予測誤差の相関行列を次のようにセットした。

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

以上のコメントより、3人の専門家のコンセンサスによる翌年度の販売予測を試みる。

題意より, $\mu_1 = 61.0$, $\mu_2 = 62.5$, $\mu_3 = 70.0$, $\sigma_1^2 = 36$, $\sigma_2^2 = 25$, $\sigma_3^2 = 49$,
 $\rho_{12} = 0.6$, $\rho_{13} = 0.5$, $\rho_{23} = 0.6$ となっている。正値分散-共分散行列 Σ は,
 下記のように導出される。

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \begin{bmatrix} \rho_{11}\sigma_1\sigma_1 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \rho_{22}\sigma_2\sigma_2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{31}\sigma_3\sigma_1 & \rho_{32}\sigma_3\sigma_2 & \rho_{33}\sigma_3\sigma_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1)(6)(6) & (0.6)(6)(5) & (0.5)(6)(7) \\ (0.6)(5)(6) & (1)(5)(5) & (0.6)(5)(7) \\ (0.5)(6)(7) & (0.6)(5)(7) & (1)(7)(7) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 36 & 18 & 21 \\ 18 & 25 & 21 \\ 21 & 21 & 49 \end{bmatrix} \tag{84}
 \end{aligned}$$

したがって, Σ の逆行列 Σ^{-1} は, 次のように与えられる。

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04558 & -0.02564 & -0.00855 \\ -0.02564 & 0.07692 & -0.02198 \\ -0.00855 & -0.02198 & 0.03349 \end{bmatrix} \tag{85}$$

前述の(61)式と(62)式を用いて, μ^* と σ^{*2} を算出する。

$$\begin{aligned}
 e' \Sigma^{-1} e &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0.04558 & -0.02564 & -0.00855 \\ -0.02564 & 0.07692 & -0.02198 \\ -0.00855 & -0.02198 & 0.03349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= 0.04365 \tag{86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e' \Sigma^{-1} \mu &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0.04558 & -0.02564 & -0.00855 \\ -0.02564 & 0.07692 & -0.02198 \\ -0.00855 & -0.02198 & 0.03349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61.0 \\ 62.5 \\ 70.0 \end{bmatrix} \\
 &= 2.73324 \tag{87}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\mu^* = \frac{2.73324}{0.04365}$$

$$= 62.62 \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \frac{1}{0.04365} \\ &= 22.91 \end{aligned} \quad (89)$$

となる。すなわち、実施例における 3 人の専門家による合成的予測値は 62.62 (10³万円)、その分散は 22.91 (10³万円) であることがわかる。ウェイト w_i ($i = 1, 2, 3$) は、 α_{ij} を Σ^{-1} の要素とすれば、 $k = 3$ として、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \alpha_{1j} &= 0.04558 - 0.02564 - 0.00855 \\ &= 0.01139 \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \alpha_{2j} &= -0.02564 + 0.07692 - 0.02198 \\ &= 0.02930 \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \alpha_{3j} &= -0.00855 - 0.02198 + 0.03349 \\ &= 0.00296 \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{hj} &= 0.01139 + 0.02930 + 0.00296 \\ &= 0.04365 \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_{1j}}{\sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{hj}} \\ &= \frac{0.01139}{0.04365} \\ &= 0.261 \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_{2j}}{\sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{hj}} \\ &= \frac{0.02930}{0.04365} \\ &= 0.671 \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
w_3 &= \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_{3j}}{\sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{hj}} \\
&= \frac{0.00296}{0.04365} \\
&= 0.068
\end{aligned} \tag{96}$$

ウェイト合計は,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 w_i &= 0.261 + 0.671 + 0.068 \\
&= 1.000
\end{aligned} \tag{97}$$

であり, 理にかなっていることがわかる。上記のウェイトを用いて, μ^* を導出することもできる。すなわち,

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \sum_{i=1}^3 w_i \mu_i \\
&= (0.261)(61.0) + (0.671)(62.5) + (0.068)(70.0) \\
&= 62.62 \text{ (} 10^3 \text{万円)}
\end{aligned} \tag{98}$$

となり, 先の結果に一致する。

以上の結果を要約すると, 3人の専門家による受注金額のコンセンサス分布は, 平均 $\mu^* = 62.62$ (10^3 万円), 分散 $\sigma^{*2} = 22.91$ (10^3 万円) を有する正規分布であり, μ^* を決定する際のウェイトは, それぞれ0.261, 0.671, 0.068である。企画スタッフC氏は49という3人中最も大きな誤差分散と, 他の2人の専門家の予測誤差と比較的高い相関関係を有していたため, ウェイトは0.068と小さな値を呈していることがわかる。

表8 3人の専門家による予測値合成

(単位: 10^3 万円)

代替的アプローチ	コンセンサス分布		ウェイトの大きさ			ウェイト 合計
	平均値	分散	A氏	B氏	C氏	
推定誤差の相関関係を考慮した場合	62.62	22.91	0.261	0.671	0.068	1.000
推定誤差の相関関係を考慮しない場合	63.76	11.34	0.315	0.454	0.231	1.000

参考までに、3人の専門家間の予測誤差に対して、 $\rho = 0$ を仮定してみる。
 正値分散-共分散行列の逆行列 Σ^{-1} は、次のように与えられる。

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02778 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02041 \end{bmatrix} \quad (99)$$

したがって、

$$e' \Sigma^{-1} e = 0.08819 \quad (100)$$

$$e' \Sigma^{-1} \mu = 5.62328 \quad (101)$$

となり、 μ^* と σ^{*2} は以下のように導出される。すなわち、

$$\begin{aligned} \mu^* &= \frac{e' \Sigma^{-1} \mu}{e' \Sigma^{-1} e} \\ &= \frac{5.62328}{0.08819} \\ &= 63.76 \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \frac{1}{e' \Sigma^{-1} e} \\ &= \frac{1}{0.08819} \\ &= 11.34 \end{aligned} \quad (103)$$

ウェイト $w_i (i = 1, 2, 3)$ は、

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{0.02778}{0.08819} \\ &= 0.315 \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{0.04000}{0.08819} \\ &= 0.454 \end{aligned} \quad (105)$$

$$w_3 = \frac{0.02041}{0.08819} = 0.231 \quad (106)$$

となる。

予測誤差の依存関係が、3人の分布を結合する際に無視できるならば、コンセンサス分は、 $\mu^* = 63.76$ (10^3 万円), $\sigma^{*2} = 11.34$ (10^3 万円) を有する正規分布となり、 μ_1 , μ_2 , μ_3 に与えられるウエイトはそれぞれ0.315, 0.454, 0.231になる。

このように、依存関係を無視すると平均的予測値がやや高くなり、分散は極度に小さくなる。平均値が高めに導出される理由は、3人目のC氏の予測値に高めのウエイトが付与されたためである。なお、予測誤差の間に独立性を仮定することは、3人の専門家間に情報が重複していない状況を想定しているのである。

実施例では、予測誤差の相関行列を所与としたが、現実の問題はかかる情報が常に整備されているとは限らない。むしろ、予測誤差の正值分散—共分散行列 Σ が未知の場合こそ、企業の予測実務の現実であろう。 Σ が既知であることは、大きな確実性が暗示される。既存製品の場合、種々の状況において予測誤差の相関関係を研究することは、この種の判断主導型予測の精度向上に不可欠の努力といえよう。

Winkler は、 Σ 未知の場合のアプローチを明解に示しているが、紙面の都合もあって、ここでは省略する。

11 要約と結語

予測値合成法という予測精度向上のための統計的アプローチは、企業の短期需要予測や販売予測にとって、有効かつ実用性に富む方法として今後一層の研究が期待されている分野である。当該アプローチには、予測値の単純合成と加重平均に基づく重み付き合成があるが、本小冊子では後者を選択し、

ベイジアン法の枠組の中で、アプローチのプロセスを実施例も付記して展開した。具体的には、インプット情報が時系列値による代替的方法に依存する場合と、いわゆる判断主導型予測の範疇に入る専門家とのコンセンサス分布を導出する場合の2通りが対象となっている。ともすると、企業の予測担当者は技法の使いやすさに走り勝ちであり、正確さの最大化 (maximization of accuracy) を軽視する傾向がある。特に、向う1年以内といった短期予測では、この問題は無視できない。不況の時は、いずれ好況になるからもっと設備が必要になると考え、好況の時はいつまでもブームが続くと思い込む。この心理的メカニズムは、予測における陥穽の典型といわれるが、精度の向上を予測値合成に求める場合、次の2点を留意する必要がある。

- (1) インプット情報が時系列値による外挿法が適用される場合は、使用する技法間の従属性が減少し、追加された方法での新しい情報量の増加が期待できるように、なるべく原理的に異なる方法を採用する方が得策である。また、種々の組合せによる予測値の合成と、異なる技法による予測誤差の挙動に同一のパターンが見られるか否かの識別にも注目すべきであろう。
- (2) 専門家のコンセンサスを活用する場合の焦点は、専門家相互間の予測誤差に関する依存関係が成立するか否かを見極めることにある。専門家の判断を合成した予測値は、各々の専門家が評価した平均値の1次結合であり、予測誤差の分散-共分散行列による正確性と依存度に関連したウェイトを有することになる。正規性の仮定を導入することにより、アプローチの実用性が増大すると共に、ともすると予測誤差の分散-共分散行列が未知の場合も多いゆえ、その対応も日頃から十分の研究が要請されよう。

参考文献

- 1) D. W. Bunn (1975), "A Bayesian Approach to the Linear Combination of Forecasts", Operational Research Quarterly, Vol. 26, No. 2, i, pp. 325-329.
- 2) R. L. Winkler (1981), "Combining Probability Distribution from Dependent Information Sources", Management Science, Vol. 27, No. 4, April, pp. 479-488.
- 3) R. L. Winkler and S. Makridakis (1983), "The Combination of Forecasts", Journal of the Royal Statistical Society, Series A. 146, pp. 150-157.
- 4) P. A. Morris (1977), "Combining Expert Judgments: A Bayesian Approach,"

- Management Science, Vol. 23, No. 7, March, pp. 679-693.
- 5) R. L. Winkler (1972), "Introduction to Bayesian Inference and Decision", Holt, Rinehart and Winston.
- 6) 大石展緒, 大石迪夫共著 (1982), 「マーケティング意思決定—ベイズ・アプローチ」, 講談社サイエンティフィク, pp. 39-47.

注

- 1) S. Makridakis, A. Andersen, R. Carbone, R. Fildes, M. Hibon, R. Lewandowski, J. Newton, E. Parzen, R. L. Winkler (eds), "The Forecasting Accuracy of Major Time Series Methods", John Wiley & Sons, p. 293.
- 2) 大石展緒, 大石迪夫共著 (1982), 前掲書, p. 20.
- 3) R. L. Winkler (1967), "The Assessment of Prior Distribution in Bayesian Analysis", Journal of the American Statistical Association. September, p. 793.
- 4) 大石展緒 (1993), 「市場実験によるアクション効果の測定とその実際」, 経営研究, 愛知学泉大学経営研究所, 第6巻, 第2号, 3月, pp. 23-25.
- 5) S. J. Press (1972), "Applied Multivariate Analysis", Holt, Rinehart and Winston.