

市場実験によるアクション効果 の測定とその実際

大 石 展 緒

◆キーワード

市場実験 (test market) 成長曲線 (growth curve) 正規直交コントラスト・マトリックス (orthonormal contrast matrix) パラレリズムの決定 (determination of parallelism) 直交多項式 (orthogonal polynomials) ヴァンデルモンド・マトリックス (Vandermonde matrix) 減衰効果 (decay effect) ARMAモデル (Autoregressive Moving Average Model) 平均2乗予測誤差 (Mean Square Predicted Error)

はじめに

市場実験 (test market) は、マーケティング計画の良否を評価するための一方法として従来より多くの企業で実施されてきた。この方法は、「測定のために必要とする範囲を越えて観測者が介入する調査」¹⁾と定義され、計画済のアクションに関する不確実性の減少を意図して実施される。マーケティング問題に市場実験が採用される理由は、結果に対する保証のない推定への歯止の点で、非実験法よりも好ましいと考えられるからである。市場実験にも種々の問題点があるが、アクション効果の測定を狙いとしたデータ解析の立場から見ると、きわめて短期的な売上高時系列を取扱うことになる。かかるデータは、現存する統計的解析法になじみにくいという欠点を有している。

J・フィンによる成長曲線（growth curve）の活用は、市場実験データの解析にまつわる本質的な問題点を克服しうる一つのアプローチと考える。本小冊子は、そのアプローチのプロセスと実際の展開を示すことを第1の狙いとする。

一方、アクション効果の測定上のキーポイントは、分析の対象となっているマーケティング・アクションに関して、それを実施するグループと実施しないコントロール・グループ（対照群）との観測値の対比が必須条件になっている。本小冊子では、かかる条件を考慮した市場実験データ（等間隔の時系列値）を取り扱う。「数値の裏に言葉あり、言葉の裏に数値あり、数値は万事インテリジェンス化の根元なり」とは、計量的接近の原点である。アクション効果測定の実際は、機械的なデータ収集や統計的处理からは有意意味な回答が得られないと熟知すべきであろう。

1 市場実験データの特徴

「もし、何事もうまくゆかない時は、これもそうなる」という名言は、有名なマーフィの法則の一つである。この法則は、まさに新製品開発のプロセスを言い当てている。失敗というものは、新製品の開発および購入についてのものであり、市場実験は可能な限り失敗を避ける一つの手段、換言すれば、不確実性低減のための予行演習的意義を有している。

市場実験は、今日新製品開発プロセスのみならず、既存製品のマーケティング・アクションの効果測定に不可欠な方法となっている。市場実験の導入に関して、販売予測はもとより、消費者の反応および広告、販売促進、価格などのマーケティング意思決定変数に対する市場レスポンス情報が得られるようなデータ収集の仕組みを考えるべきであろう。市場実験の方法自体をここで取りあげる余裕はないゆえ、後述する効果測定との兼合いから実験データの特徴について、その若干を説明する。

とりあえず、データ構成上の特徴として、次の4点を指摘しておく。

- (1) 実験期間が数ヶ月といった短期志向のため、観測値としての売上高も少数サンプルにならざるを得ない。
- (2) 実験は通常、マーケティング・アクションを実施するグループと、実施しないコントロール・グループ（対照群）との比較が可能なように計画される。したがって、観測値もまた両グループ毎の双対型を形成している。
- (3) 実験データは、多くの場合、アクション実施前、実施中、実施後といった質的に異なる時間期間で観測された一連の情報セットを形成する。
- (4) 実験データからの予測を全国レベルに投影できるよう、複数の代表的地域での時系列値が分析の対象となっている。

これら4種の特徴の内、特に、第1のデータ系列の短かさと、第2の対比（comparison）という操作を分析に持込む点に着目する必要がある。問題の焦点が予測にある場合、上記の特徴に加えて、特性値として累積売上高がしばしば用いられる点も留意しなければならない。一般に、この種の統計解析には、実験計画法で用いる分散分析（ANOVA）が考えられるが、本小冊子の対象とはなりにくい。

理由は、分析対象のデータには自己相関（auto-correlation）の存在が懸念されるからである。たとえば、市場実験が2種のグループ（コントロール・グループと非コントロール・グループ）に分割されている場合、ペアとなる観測値同志の相関関係の強弱は、これらの値が相互にどの程度密接に関連しているかに依存する。同様の論拠から、繰返しのある分散分析やダミー回帰分析も、データに自己相関がある場合には適切とはいえない。実験期間の短かさから、ARMAモデル²⁾（Autoregressive Moving Average Model）のような高度な時系列モデルもまず役に立たない。

サンプル数の極度に少ない実験データの解析法の一つに、J・フィンの成長曲線（growth curve）がある。当該成長曲線の基本的着想は、彼の1969年発表の論文³⁾「測定値に繰返しがある場合の多変量解析」にくわしく述べられている。この方法は目的変数（たとえば、売上高）を等間隔で繰返しのある観測値としてとらえたとき、マーケティング・アクションのもたらす効果

を特徴づけ、コントロール・グループと比較が可能な仕組を有している。

アプローチの最終アウトプットとして、2種のグループのそれぞれに対して時間と目的変数（この場合、累積売上高）との関係を示す直交多項式（orthogonal polynomials）が導出できる。わが国のマーケティング調査や販売予測の分野では、フィンの成長曲線はあまり活用されていないと思われる。ここで検討しているアプローチの長所は、マーケティング問題で出会う短期的時系列データの解析を可能にするのみならず、グループ毎の累積売上高の変化について、それぞれの傾向線は、

- (1) 同一（indentical）のパターン
- (2) 平行（parallel）のパターン
- (3) 異形（different）のパターン

のいずれかを統計的検定から識別できる点にある。カーブ・フィティングの結果、得られた傾向線は統計的論拠が与えられない限り、高次の項を含むことにリサーチャーは躊躇するであろう。いずれにしても、マーケティング・マネジャーとリサーチャーは、市場実験に対して上記のような解析方法が要請される点を十分理解すべきである。

2 解析に用いるデータ

市場実験が行なわれ、観測値である売上高のデータが入手し得た場合、原系列をそのまま成長曲線分析に用いるわけではない。原系列は、日別、週別、月別などの形態で構成されるが、単に累積値に加工するのみならず、これらを再度変換するプロセスを通過する。

次に、かかるデータ変換について概説する。

データ変換に関する最初の手順は、観測値を時系列的に累積したものを行列表記することである。これを、 nY_p で表わす。

$${}_n Y_p = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}, & \cdots, & y_{1j}, & \cdots, & y_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{i1} & y_{i2}, & \cdots, & y_{ij}, & \cdots, & y_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2}, & \cdots, & y_{nj}, & \cdots, & y_{np} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 y_{ij} は j 番目の期間における第 i サブジェクトの累積売上高であり、 n はサブジェクトの個数、 p は期間数を示している。次の手順は、 y_{ij} を正規直交変換し、 ${}_n Z_p$ 行列を作成する。

すなわち、データ行列 ${}_n Y_p$ に、 $p \times p$ 次の行列 ${}_p M_p$ を乗じて ${}_n Z_p$ を導出するのである。すなわち、

$${}_n Z_p = ({}_n Y_p) ({}_p M_p) \quad (2)$$

上記の(2)式において、右辺第2項の行列 ${}_p M_p$ は R・D・ブロックによって提示され、正規直交コントラスト・マトリックス⁴⁾ (orthonormal contrast matrix) と呼ばれている。ここに、正方行列 M に対して、 $M = M^{-1}$ になるとき、成分的にいえば、各行や各列の要素の2乗和が1、また、 $|M| = \pm 1$ であれば、当該行列は正規直交行列と定義される。出力結果としての行列 ${}_n Z_p$ の各行は、実験期間中の累積売上高に関する情報のみならず、各々の実験サブジェクト別に潜在的な成長曲線が描けるよう直交多項式のコントラスト・スコアをも含んでいる。具体的にいえば、各サブジェクト毎に適用できる直交多項式の次数(0次, 1次, 2次, 3次, …… , 最高 $p-1$ 次)は、行列 ${}_n Z_p$ の各行の要素に反映される仕組みになっている。

すなわち、

$${}_n Z_p = \begin{pmatrix} z_1(0\text{次}) & z_1(1\text{次}), & \cdots, & z_1(j-1)\text{次}, & \cdots, & z_1(p-1)\text{次} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_i(0\text{次}) & z_i(1\text{次}), & \cdots, & z_i(j-1)\text{次}, & \cdots, & z_i(p-1)\text{次} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_n(0\text{次}) & z_n(1\text{次}), & \cdots, & z_n(j-1)\text{次}, & \cdots, & z_n(p-1)\text{次} \end{pmatrix} \quad (3)$$

正規直交コントラスト・マトリックスを使用する理由は、売上高の累積値を示すデータ ${}_n Y_p$ が時間に関して等間隔で区切られており、しかも一対をなす観測値間の高度な従属性が想定できるからである。かかる行列 ${}_p M_p$ を用

いる大きな利点は、出力される行列 nZp が分析対象データの自己相関性を除去し、当該行列の各列のデータが直交するように生成される点にある。次にあげる簡単な数値例は、これまでのデータ変換の有効性を如実に示している。

$${}_3Y_4 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.85 & 0.85 & 0.85 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.6 & -0.6 & -0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

上記の行列 ${}_3Y_4$ において、繰返しのある3つのサブジェクトにつき、等間隔に観察を4回行なった結果を示している。直観的に、サブジェクト1のデータ（第1行のデータ）には変化が見られず、サブジェクト2は等差で増加、サブジェクト3は2次曲線的であることがわかる。この場合の正規直交コントラスト・マトリックス ${}_4M_p$ は、以下のように与えられる。

$${}_4M_4 = \begin{pmatrix} 0.50000-0.67082 & 0.50000-0.22361 \\ 0.50000-0.22361-0.50000 & 0.67082 \\ 0.50000 & 0.22361-0.50000-0.67082 \\ 0.50000 & 0.67082 & 0.50000 & 0.22361 \end{pmatrix} \quad (5)$$

したがって、 ${}_3Z_4 = ({}_3Y_4) ({}_4M_4)$ は、

$${}_3Z_4 = \begin{pmatrix} 1.700 & 0 & 0 & 0 \\ 5.000 & 2.236 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。(6)式に見る行列 ${}_3Z_4$ は、各サブジェクトの変化傾向にフィットする直交多項式の成分範囲を示唆している。予想通り、最初の方程式は、定数項のみとなっている。第2の方程式は定数項と1次項、最後は2次項のみである。結局、解析上のオリジナル・データ行列 nYp を nZp 行列に変換する意図は、データを線形結合し、変化のパターンを識別することにあるといえよう。なお、データをコード化するときには、テスト単位別にマーケティング・アクション（たとえば、広告や販売促進など）に関する実験の有無をダミー

変数で表現しなければならない。店舗実験を例にとれば、アクション実施店には1、非実験店には0を与えるといった具合である。参考までに、表1には、解析上のデータ行列の一例を載せておく。

表1 解析に用いる市場実験データの典型

| 期 間 区 分 | 週 別 | | | | | ダミー 変 数 |
|------------------|---|----------|----------|----------|----------|------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 非コントロール ・グループ | y_{11} | y_{12} | y_{13} | y_{14} | y_{15} | 1 |
| | y_{21} | y_{22} | y_{23} | y_{24} | y_{25} | 1 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | | | |
| コントロール ・グループ | y_{i1} | y_{i2} | y_{i3} | y_{i4} | y_{i5} | 0 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | y_{n1} | y_{n2} | y_{n3} | y_{n4} | y_{n5} | 0 |
| 備 考 | (1) y_{ij} ($i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, n$) は、累積売上高を示す。 (2) 期間は、ここでは週別を採用し、5週間と してある。 (3) ダミー変数は、マーケティング・アクション の有無を示す。 | | | | | |

3 パラレリズムの決定

次に取りあげる内容は、比較の対象となる2種のグループの売上傾向が平行的パターンか否かを統計的に識別するためのもので、いわゆるパラレリズムの決定 (determination of parallelism) に関する問題である。当該アプローチに不可欠な $n \times p$ 行列の解析には、表2に見る5種のダミー回帰モデルを活用する。

表2のダミー回帰モデルでは、直交多項式で考慮される成分を4次までに限

表2 パラレルイズムの決定や成長曲線のタイプの認定に用いる
ダミー回帰モデル

| モデル NO. | 名 称 | 計 測 式 |
|---------|--------------------|--|
| I | 4 次 式 対 応 型 | $z_{i5} = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \beta_3 z_{i3} + \beta_4 z_{i4} + \beta_d d$ |
| II | 3 次 式 対 応 型 | $z_{i4} = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \beta_3 z_{i3} + \beta_d d$ |
| III | 2 次 式 対 応 型 | $z_{i3} = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \beta_d d$ |
| IV | 1 次 式 対 応 型 | $z_{i2} = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_d d$ |
| V | 0 次式 (水平) 対 応 型 | $z_{i1} = \beta_0 + \beta_d d$ |

(注) 表中の d は、マーケティング・アクションの有無を示すダミー変数である。

定している。現実の市場実験において、論理的な説得力の点で5次、6次といった高次の項の導入は不要と考えられるためである。2種の成長曲線が平行であるためには、各トリートメント・グループに関する4次、3次、2次、1次の成分それぞれに対する直交多項式のコントラスト・スコア (orthogonal polynomial contrast scores) が、全データをプールして得られる合成的成長曲線のものと著しく異なってはならないのである。各成長曲線のモデルが異なったマーケティング戦略の適用を示すダミー変数を有していても、直交多項式のコントラスト・スコアで説明される分散の値を著しく増加させないはずである。換言すれば、2種の成長曲線が互に平行ならば、ダミー変数の係数 β_d は、表2のモデルI～IVにおいて0に近い値を取るはずである。いうまでもなく、回帰係数 β_d の統計的有意性は、 t 検定に依存する。 t 検定の結果に関して、以下のコメントは分析を展開する際に不可欠となる。

(1) ダミー回帰モデルI～IVの内、いずれか1つでも β_d の有意性が所与の危険率で保証されると、トリートメント・グループ別の2種の成長曲線は、平行とはいえないことになる。

したがって、グループ別に売上高モデルを構築する。

(2) ダミー回帰モデルⅠ～Ⅳのいずれも、 β_d に有意性が認められないときは、2種の成長曲線は互いに平行であるといえる。そこで、表2のⅤのモデルを適用し、 β_d の有意性を検定する。したがって、検定結果からさらに2種のケースが想定される。

① β_d に有意性が認められないとき

この場合は、2種の成長曲線は平行であるばかりか、定数項も同一とみなされる。すなわち、2種の成長曲線は同一のパターンとして識別され、モデルは1本化される。

② β_d に有意性が認められるとき

この場合は、2種の成長曲線は互いに平行であるが、定数項のみ異なるといえよう。したがって、2種の成長曲線は個別にモデル化できるが、定数項は異なる値を取るのである。

結論的には、当該市場実験において、アクション実施前の売上高水準が等しくなったといえよう。以上のように、パラレリズムの決定から、2種の成長曲線が平行的な変化傾向をもたないとみなせうる場合に、マーケティング・アクションの効果を確認できるのである。

4 カーブ・フィッティングへの留意点

成長曲線を具体化するには、モデル化に不可欠と認定された項に関して、直交多項式のコントラスト・スコアの平均値を2種のグループで比較することが要請されよう。これらの平均値は、直交多項式の成分により、成長曲線の全体像を明確にしてくれる。パラレリズムの決定プロセスを経て、グループ別のモデル化を必要とする場合を中心に、成長曲線の特定化を考える。そこで、次の記号を定義する。

n ：全サンプル数

n' ：マーケティング・アクション実施対象のグループ（トリートメント・グ

ループ1) のサンプル数

$n-n'$: コントロール・グループ (トリートメント・グループ2) のサンプル数

q : アクション実施対象グループにおけるモデルの次数

q' : コントロール・グループにおけるモデルの次数

前述のスコアの平均値は、以下のように表現する。

$${}_1\mathbf{Z}_q^{(1)} = [\bar{z}(0\text{次}) \bar{z}(1\text{次}) \bar{z}(2\text{次}) \cdots \bar{z}(q-1\text{次})] \quad (7)$$

$${}_1\mathbf{Z}_{q'}^{(2)} = [\bar{z}(0\text{次}) \bar{z}(1\text{次}) \bar{z}(2\text{次}) \cdots \bar{z}(q'-1\text{次})] \quad (8)$$

$p \times q$ 次の正規直交コントラスト・マトリックス ${}_p\mathbf{M}_q$ は、 $p \times p$ 次のそれを用いて得られる。

$${}_p\mathbf{M}_p = \left(\begin{array}{cccc|cccc} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1q} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2q} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pq} & \cdots & m_{pp} \end{array} \right) \quad (9)$$

上記(9)式の右辺に見る点線でかこまれた部分が、 ${}_p\mathbf{M}_q$ 行列を示すことになる。

累積売上高 y と時間 t との関係を示す直交多項式は、アクション実施対象グループに対して、次のように表現する。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_{q-1} t^{q-1} + \epsilon_t \quad (10)$$

ϵ_t は、 t 時点の誤差項で、 $\text{NID} \sim (0, \sigma_\epsilon^2)$ を仮定する。ここに、NID は、“Normally and Independently Distributed” の略である。未知パラメータの推定値 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ などは、平均スコアを下記のように変換して導出する。演算には、平均スコア・マトリックス ${}_n\bar{\mathbf{Z}}_q$ 、ヴァンデルモンド・マトリックス ${}_q\mathbf{V}_p$ 、正規直交コントラスト・マトリックスのサウ・マトリックス ${}_p\mathbf{M}_q$ の3種に及ぶ行列を使用する。なお、ヴァンデルモンド・マトリックス (Vandermonde matrix) ${}_q\mathbf{V}_p$ は、(11)式で定義されている。すなわち、

市場実験によるアクション効果の測定とその実際

$${}_q V_p = \begin{pmatrix} 1^0 & 2^0 & 3^0 & \cdots & p^0 \\ 1^1 & 2^1 & 3^1 & \cdots & p^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{q-1} & 2^{q-1} & 3^{q-1} & \cdots & p^{q-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

計算プロセスを列挙すると、次のようになる。

$${}_q U_q = {}_q V_p \cdot {}_p M_q \quad (12)$$

$${}_1 \hat{\beta}_q = {}_1 Z_q \cdot {}_q U_q^{-1} \quad (13)$$

(13)式に見る ${}_1 \hat{\beta}_q$ 行ベクトルの要素が、求める未知パラメータの推定値を示している。

$${}_1 \hat{\beta}_q = [\hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \cdots \hat{\beta}_{q-1}] \quad (14)$$

なお、マーケティング・アクションの適用を受けなかったコントロール・グループも、同様のアプローチでパラメータの推定が可能となる。参考までに、表3には、アクション効果が統計的に認められる場合のパラメータ推定に関する一連のステップを要約しておく。

表3 アクション効果が認められた場合の成長曲線の導出手順

| 項 目 | マーケティング・アクションの代替案 | |
|--------------------|---|--|
| | 非コントロール・グループ (プログラム1) | コントロール・グループ (プログラム2) |
| サ ン プ ル 数 | n' | $n - n'$ |
| モデルの次数 | q | q' |
| 3種のベクトル とマトリックス | $n' \bar{Z}_q$ ${}_q V_p$ ${}_p M_q$ | $n - n' \bar{Z}_{q'}$ ${}_{q'} V_p$ ${}_p M_{q'}$ |
| パラメータ推定 | ${}_q U_q = {}_q V_p \cdot {}_p M_q$ ${}_1 \hat{\beta}_q = n' \bar{Z}_q \cdot {}_q U_q^{-1}$ | ${}_{q'} U_{q'} = {}_{q'} V_p \cdot {}_p M_{q'}$ ${}_1 \hat{\beta}'_{q'} = n - n' \bar{Z}_{q'} \cdot {}_{q'} U_{q'}^{-1}$ |
| 備 考 | (1) n は、実験の総サンプル数。 (2) p は、実験の期間数。 (3) ${}_1 \hat{\beta}_q$ は、モデルのパラメータ・ベクトルを示す。 | |

表 4 市場実験における累積売上高のデータ 単位：袋

| 市場実験での累積売上高 | | | | | | | |
|--|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 区分 | サンプルNo. | 第 1 週 | 第 2 週 | 第 3 週 | 第 4 週 | 第 5 週 | 第 6 週 |
| 非 コ ン ト ロ ー ル ・ グ ル ー プ | 1 | 190 | 237 | 273 | 299 | 315 | 331 |
| | 2 | 195 | 232 | 278 | 298 | 310 | 329 |
| | 3 | 209 | 240 | 281 | 300 | 312 | 334 |
| | 4 | 187 | 232 | 275 | 289 | 311 | 331 |
| | 5 | 189 | 235 | 276 | 290 | 320 | 336 |
| | 6 | 194 | 233 | 275 | 297 | 319 | 339 |
| | 7 | 207 | 239 | 278 | 296 | 308 | 325 |
| | 8 | 201 | 238 | 276 | 293 | 312 | 332 |
| | 9 | 193 | 236 | 274 | 291 | 320 | 335 |
| | 10 | 197 | 233 | 277 | 295 | 318 | 338 |
| | 11 | 199 | 237 | 271 | 299 | 320 | 339 |
| | 12 | 192 | 241 | 272 | 296 | 309 | 327 |
| | 13 | 197 | 242 | 276 | 299 | 311 | 331 |
| | 14 | 198 | 230 | 281 | 297 | 316 | 335 |
| | 15 | 206 | 237 | 274 | 295 | 314 | 327 |
| コ ン ト ロ ー ル ・ グ ル ー プ | 16 | 188 | 200 | 211 | 225 | 236 | 248 |
| | 17 | 190 | 202 | 213 | 227 | 237 | 250 |
| | 18 | 195 | 205 | 218 | 229 | 241 | 255 |
| | 19 | 190 | 202 | 214 | 226 | 238 | 251 |
| | 20 | 201 | 208 | 219 | 232 | 240 | 254 |
| | 21 | 185 | 198 | 211 | 223 | 235 | 246 |
| | 22 | 193 | 206 | 217 | 228 | 240 | 253 |
| | 23 | 189 | 203 | 215 | 225 | 238 | 252 |
| | 24 | 187 | 199 | 215 | 226 | 240 | 253 |
| | 25 | 191 | 202 | 215 | 231 | 241 | 254 |
| | 26 | 182 | 195 | 209 | 222 | 236 | 246 |
| | 27 | 192 | 198 | 213 | 224 | 238 | 248 |
| | 28 | 187 | 198 | 212 | 225 | 240 | 252 |
| | 29 | 188 | 203 | 215 | 224 | 245 | 250 |
| | 30 | 189 | 200 | 213 | 222 | 240 | 248 |

5 アプローチの実施例

J・フィンの成長曲線を用いた実施例として、K社のあるスナック菓子に関する市場実験を取りあげる。企業機密の保持のため、データは現実の数値を変えると共に、ブランド名は伏せてある。実験は福岡県で1990年10月2週から5週間に渡りスーパー・マーケットをテスト単位として実施された。サンプル総数は30店で、コントロール・グループ15店、非コントロール・グループ15店ずつの配分となっている。非コントロール・グループには、顧客の需要喚起、認知の増大を主眼とした一種の販促キャンペーンを実施し、売上高への直接的効果をコントロール・グループとの対比から計測する意図をもつ。観測値は売上数量で、10月第1週よりデータを収集している。なお、第1週はいわば実験の準備期間で、これもデータ解析の対象期間に入る。表4は、観測値の原データを累積値に変換したものである。

表5 市場実験の概要

| 区分 | サンプル数 | 平均累積売上高（単位：袋） | | | | | | 実験間の 売上高変化 |
|-----------------------|-------|---------------|---------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| | | 準備期間 | 実 験 期 間 | | | | | |
| | | | 1 週 | 2 週 | 3 週 | 4 週 | 5 週 | |
| 非コント ロール・ グループ | 15 | 196.9 | 236.1 | 275.8 | 295.6 | 314.3 | 332.6 | 135.7 |
| コ ン ト ロール・ グループ | 15 | 189.8 | 201.3 | 214.0 | 225.9 | 239.0 | 250.7 | 60.9 |

実験結果の概要は、表5に要約されている。累積売上高（数量ベース）の平均値で2種のグループを比較すると、一見して非コントロール・グループの方がコントロール・グループよりも1店当たりの数量は大きく、その傾向は実験期間中すべてに妥当する。ちなみに、第6週と第1週の予備期間の変化

に関する絶対量は、前者が135.7袋、後者が60.9袋と2.23倍の格差が生じている。表5は、直観的に当該キャンペーンの売上高に対するインパクトを示唆している。

5-1 パラレリズムの決定

本格的な分析の第一歩は、販促キャンペーンの売上数量に及ぼす効果を識別する目的で、直交多項式のコントラスト・スコア・マトリックスを解析し、パラレリズムを決定することである。2種の異なるプロモーション戦略を示すダミー変数の係数を β_d で示し、モデルは表2に準ずる。パラレリズムのテスト結果は、表6に要約してある。

表6 パラレリズムの決定に関する t 検定

| モデル No. | モデルのタイプ | ダミー変数における 回帰係数の推定値 $\hat{\beta}_d$ | 同左の標準偏差 $S\hat{\beta}_d$ | t 値 |
|---------|---------|--|-----------------------------|-----------|
| I | 4次式対応型 | -3.42290 | 20.03534 | 0.17084 |
| II | 3次式対応型 | -11.45726 | 14.47975 | 0.79126 |
| III | 2次式対応型 | -50.29061 | 11.07359 | 4.54149** |
| IV | 1次式対応型 | 92.46861 | 22.70140 | 4.07326** |
| 備 考 | | 第5欄に見る**印は、1%有意を示す。 | | |

表6は、非コントロール・グループとコントロール・グループの成長曲線が、互いに平行とはいえないことを示している。t検定の結果は、プロモーション戦略の差異が成長曲線の1次成分と2次成分に明白な効果を与えていると指摘している。したがって、非コントロール・グループとコントロール・グループのそれぞれに対してモデルの特定化を行なうことになる。

グループ別のアプローチが不可欠と立証されたので、グループ毎に¹⁵Z₄行列を作り、それぞれに、表2に見る4種のダミー回帰モデルを当てはめ、

定数項の有意性検定を行なう。かかる検定から、グループ別に採用する関数型が明確になる。検定の結果は、表7に載せてある。

表7 グループ別に当てはめるべき成長曲線の次数

| モデル No. | モデル のタイプ | 市場実験の内容区分 | | | | | |
|------------|-------------|--------------------------------|------------------------------|-----------|-------------------------------|------------------------------|-----------|
| | | 非コントロール・グループ | | | コントロール・グループ | | |
| | | 定 数 項 β_0 | 同左の 標準偏差 $S_{\beta 0}$ | t 値 | 定 数 項 β_0 | 同左の 標準偏差 $S_{\beta 0}$ | t 値 |
| I | 4次式対応型 | -173.01492 | 193.13264 | 0.89583 | 19.61085 | 55.46011 | 0.35360 |
| II | 3次式対応型 | 121.47519 | 125.98596 | 0.96420 | -42.53662 | 42.66481 | 0.99700 |
| III | 2次式対応型 | -314.89296 | 94.94420 | 3.31661** | -32.67863 | 25.36163 | 1.28851 |
| IV | 1次式対応型 | 311.91548 | 263.13169 | 1.18540 | 164.30233 | 53.15826 | 3.09081** |
| 判 定 | | 非コントロール・グループは、2次成分までを考慮すべきである。 | | | コントロール・グループは、1次成分までを考慮すべきである。 | | |
| 備 考 | | 表中に見る**印は、1%有意を示す。 | | | | | |

表7から、有意性のある定数項を含むモデルの次数は、非コントロール・グループでは2次項まで、コントロール・グループは1次項までと結論できよう。換言すれば、累積売上高のカーブ・フィティングには前者が2次式、後者が1次式であることがわかる。

5-2 グループ別成長曲線の特定化

成長曲線の特定化には、すでに導出されている直交多項式のコントラスト・スコア・マトリックスを用いて、グループ別の平均スコア・ベクトル ${}_1\bar{\mathbf{Z}}_3$, ${}_1\bar{\mathbf{Z}}_2$ を計算することから出発する。そして、前述(12)式の採用により、直交多項式の未知の係数を導出しなければならない。以後の説明は、グループ別に接近する。

(1) 非コントロール・グループの場合

モデルの未知パラメータの推定に必要なベクトルと行列は、下記に示す通りである。

$${}_1\mathbf{Z}_3^{(1)} = [674.1812 \quad 111.4830 \quad -20.5561] \quad (15)$$

$${}_6\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$${}_6\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0.4082 & -0.5976 & 0.5455 \\ 0.4082 & -0.3586 & -0.1091 \\ 0.4082 & -0.1195 & -0.4364 \\ 0.4082 & 0.1195 & -0.4364 \\ 0.4082 & 0.3586 & -0.1091 \\ 0.0482 & 0.5976 & 0.5455 \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、前述(12)式を思い出すと、

$$\begin{aligned} {}_3\mathbf{U}_3 &= {}_3\mathbf{V}_6 \cdot {}_6\mathbf{M}_3 \\ &= \begin{bmatrix} 2.4495 & 0.0000 & 0.0000 \\ 8.5732 & 4.1833 & 0.0000 \\ 37.1506 & 29.2831 & 6.1101 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

${}_3\mathbf{U}_3$ 行列の逆行列 ${}_3\mathbf{U}_3^{-1}$ は、次のように示される。

$${}_3\mathbf{U}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4082 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.8367 & 0.2390 & 0.0000 \\ 1.5275 & -1.1456 & 0.1637 \end{bmatrix} \quad (19)$$

したがって、パラメータ・ベクトル ${}_1\hat{\beta}_3$ は、

$${}_1\hat{\beta}_3 = [150.56000 \quad 50.19952 \quad -3.36429] \quad (20)$$

のように与えられる。つまり、最終的には、非コントロール・グループの成長曲線は、

$$\hat{y}_t = 150.56 + 50.19952t - 3.36429t^2 \quad (21)$$

で与えられる。ここに、 y は累積売上高、 t は時点で、 $t=1$ = 第1週にとつてある。

(2) コントロール・グループの場合

次に、コントロール・グループの場合を取りあげる。非コントロール・グループの場合と同様に、

$${}_1\bar{\mathbf{Z}}_3^{(2)} = [5339.1599 \quad 51.3311] \quad (22)$$

$${}_2\mathbf{V}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$${}_6\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.4082 & -0.5976 \\ 0.4082 & -0.3586 \\ 0.4082 & -0.1195 \\ 0.4082 & 0.1195 \\ 0.4082 & 0.3583 \\ 0.4082 & 0.5976 \end{pmatrix} \quad (24)$$

である。

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{U}_2 &= {}_2\mathbf{V}_6 \cdot {}_6\mathbf{M}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2.4495 & 0.0000 \\ 8.5732 & 4.1833 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

$${}_2\mathbf{U}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4082 & 0.0000 \\ -0.8367 & 0.2390 \end{pmatrix} \quad (26)$$

となるゆえ、パラメータ・ベクトル ${}_1\hat{\beta}_2$ は、

$${}_1\hat{\beta}_2 = [177.16444 \quad 12.27048] \quad (27)$$

表8 未知パラメータの推定結果

| アクション・プログラム | 未知パラメータの推定値 | | |
|--------------------|-------------|----------|----------|
| | 定数項 | 1次係数 | 2次係数 |
| 非コントロール・グループ用 1 | 150.56000 | 50.19952 | -3.36429 |
| コントロール・グループ用 2 | 177.16444 | 12.27048 | — |

のように与えられる。よって、求める成長曲線は、

$$\hat{y}_t = 177.16444 + 12.27048t \quad (28)$$

となる。計測結果は、表 8 にまとめておく。

6 計測結果の評価と考察

成長曲線の特定化を終えたので、2 種のモデルが累積売上高の実際をどの程度説明し得るかを、予測誤差の観点から考察する。加えて、結果のマーケティング現象からの分析も試みる。

6-1 予測誤差の程度

実験期間中のモデルから導出される累積売上高の推定値は、表 9 に第 7 週における予測値と共に載せてある。この場合、予測値は参考までに求めたので、単なる外挿にすぎない。

表 9 より、一見してモデルは現実を十分反映していることがわかるが、定量

表 9 測定期間中および第 7 週における売上高の推定値 単位：袋

| 区分 週 | 非コントロール・グループ (プログラム 1) | | | コントロール・グループ (プログラム 2) | | |
|---------|---------------------------|---------|------|--------------------------|---------|------|
| | 推定値 | 実績 | 残 差 | 推定値 | 実 績 | 残 差 |
| 1 週 | 197.4 | 196.9 | -0.5 | 189.4 | 189.8 | 0.4 |
| 2 週 | 237.5 | 236.1 | -1.4 | 201.8 | 201.3 | -0.5 |
| 3 週 | 270.9 | 275.8 | 4.9 | 214.0 | 214.0 | 0.0 |
| 4 週 | 297.5 | 295.6 | -1.9 | 226.2 | 225.9 | -0.3 |
| 5 週 | 317.4 | 314.3 | -3.1 | 238.5 | 239.0 | 0.5 |
| 6 週 | 330.6 | 332.6 | 2.0 | 250.8 | 250.7 | -0.1 |
| 合 計 | 1,651.4 | 1,651.3 | 0.0 | 1,320.7 | 1,320.7 | 0.0 |
| 7 週 | 377.1 | — | — | 263.1 | — | — |

的表現からも明示しておく。予測誤差 E_t は、

$$E_t = P_t - A_t \quad (29)$$

で定義される。ここに、 P_t は計測期間中の予測値、 A_t は同じく実績を示している。 t は時点で、 $t = 2, 3, \dots, 6$ である。

$$P_t = \frac{\hat{y}_t}{y_{t-1}} - 1 \quad (30)$$

$$A_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 \quad (31)$$

実現値に対する予測の近似性は、開差が生じたことによる損失に関連して、意思決定の結果の重要性を示唆するものである。予測誤差の重要性について異なる見解を反映する各種の尺度から、ここでは平均 2 乗予測誤差 MSPE (Mean Square Predicted Error) を採用する。

$$\begin{aligned} \text{MSPE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2 \\ &= \underbrace{(\bar{P} - \bar{A})^2}_{\langle \text{バイアス} \rangle} + \underbrace{(1 - \delta_{P,A})^2 s_P^2}_{\langle \text{非能率性} \rangle} + \underbrace{(1 - r_{P,A}^2) s_A^2}_{\langle \text{ランダム・エラー} \rangle} \end{aligned} \quad (32)$$

表10 予測誤差の分解と OLCF による予測値

| 区 分 | | 非コントロール・グループ (A) | コントロール・グループ (B) |
|----------------------------|---------------------------|----------------------|----------------------|
| 項 目 | | | |
| 平均 2 乗予測 誤差 (MSPE) | バイアス | 0.00204 | 0.07187 |
| | 非能率性 | 0.00890 | 0.11098 |
| | ランダム・エラー | 0.98906 | 0.81715 |
| | 合 計 | 1.00000 (0.00014) | 1.00000 (0.00000) |
| 回 帰 モ デ ル | 定数項 ($\gamma_{P,A}$) | -0.00162 | 0.00578 |
| | スロープ係数 ($\delta_{P,A}$) | 1.01924 | 0.89204 |
| 修正変化率 (* \hat{P}_{T+1}) | | 0.00120 | 0.05000 |
| 修正予測値 (* \hat{y}_{T+1}) | | 336.6 (袋) | 263.2 (袋) |
| 未修正予測値 (\hat{y}_{T+1}) | | 337.1 (袋) | 263.1 (袋) |

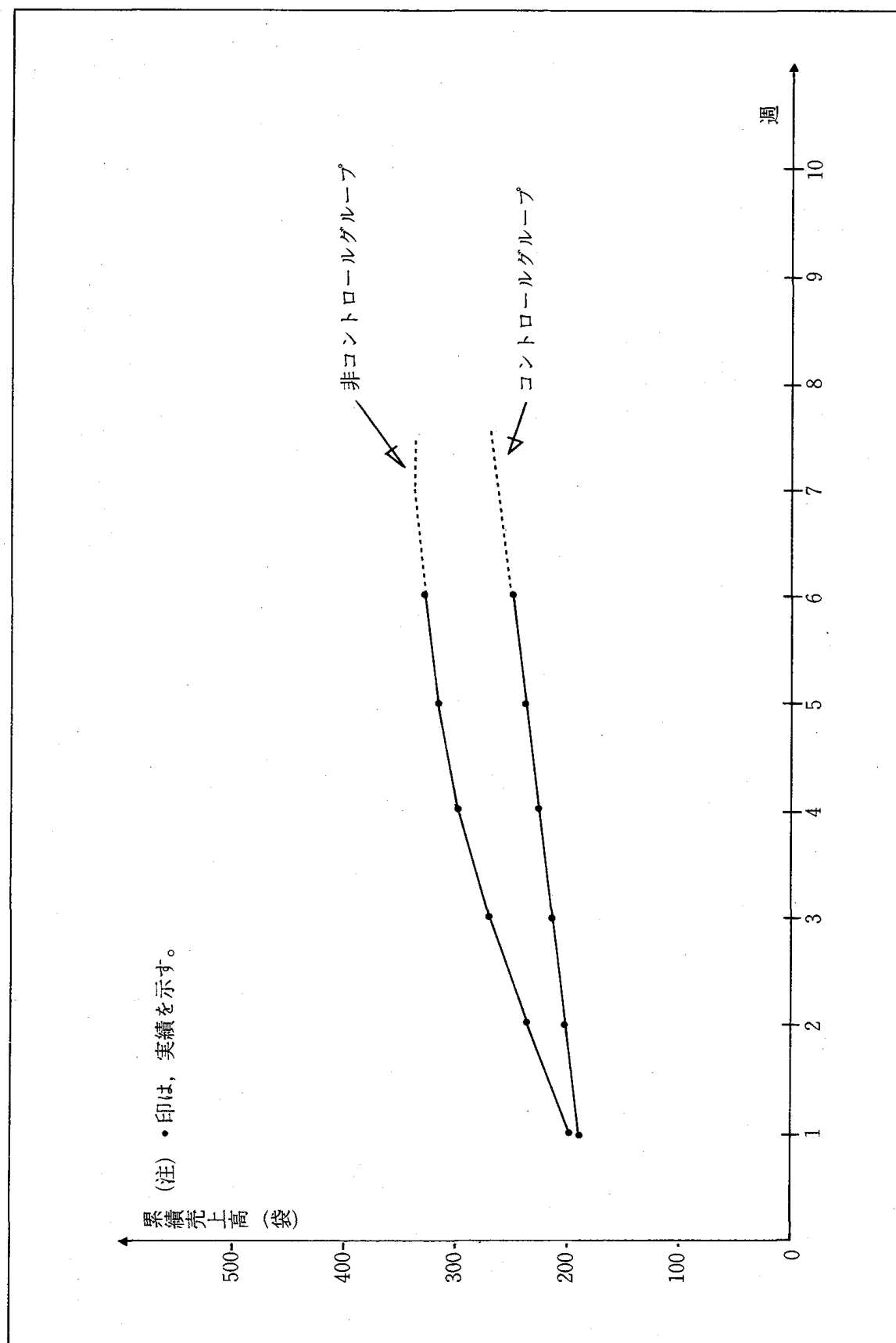


図1 市場実験における累積売上高の変化傾向

ここで、 $\delta_{P,A}$ は A_t の系列と P_t との線型関係におけるスロープ係数、 $r_{P,A}^2$ は P_t と A_t との相関係数の 2 乗値、 s_P^2 と s_A^2 は P_t と A_t それぞれの分散を示している。平均 2 乗予測誤差は、上記(32)式に見るように、これを構成する 3 種の成分に分割でき、予測の管理に有効な情報を与えてくれる。(32)式の右辺第 1 項は平均値の違いによるもの (*bias*)、第 2 項は回帰係数の不良によるもの (*inefficiency*)、第 3 項は管理不能ないわゆるランダム・エラー (*random error*) と解釈できる。

当該市場実験の場合、非コントロール・グループとコントロール・グループ別の平均 2 乗予測誤差と、これを 100% に取ったときの成分構成比を表 10 に載せてある。また、図 1 には、H・タイルの予測－実績図表 (*prediction-realization diagram*) を示しておく。

MSPE の値は、非コントロール・グループでは 0.00014、コントロール・グループで 0.00000 ときわめて小さな値を取っている。平均 2 乗予測誤差は 2 次損失の前提 (*assumption of quadratic loss*) に基づいており、小さい予測誤差に比較すると大きな誤差が不正確度に反比例するように予測の的確性を測定する。したがって、2 種の成長曲線による累積売上高の変化傾向は、現実を的確に表現しているといえよう。このことは、図 2 の予測－実績図表において、各点が完全予測線の近傍に布置されていることから理解できよう。

当該市場実験の場合、平均 2 乗予測誤差が小さいゆえ、その構成成分をさらに分析する必要性はないが、一般的には実験自体の本質的な性格からアプローチが要請される事態もありうる。非コントロール・グループでは、実験の性質から、被実験者が通常とは異なる行動を取ったり、ユニークな環境が人為的に生起する場合も多い。ある食品店に割当てられた陳列棚のスペースの大きさを操作するような実験で、店主は実験のために必要な陳列の変更を許否したり、期間中に通常の設置状態に引きもどすといった例も多数存在する。このため、観測値の時系列的な挙動にある種の断層や系統的な変化が生ずる。かかる事態をふまえて解析を展開するゆえ、モデル化の際の実績差異分析が意味をもつのである。表 10 より、非コントロール・グループでは、

バイアスの程度が0.20%, 非能率性の程度が0.89%, ランダム・エラーが98.91%であるのに対し, コントロール・グループではバイアスの程度7.19%, 非能率性の程度11.10%, ランダム・エラー81.71%となっている。2種のグループ共, 予測誤差全体はきわめて小さいが, 構成成分上は非コントロール・グループよりもコントロール・グループの方が管理不能誤差の程度が低くなっている。分析者が予測誤差を管理しうるのは, 上記の成分の内, バイアスおよび非能率性の部分である。本事例では, 販売予測は中枢的テーマではないのでくわしくは述べないが, 計測期間中におけるバイアスおよび非能率の割合を減少させることにより, 予測精度の向上が期待できよう。この種の代表的アプローチに, H・タイルの最適線型修正 OLCF (Optimal Linear Correction of Forecasts) 法⁵⁾がある。

かくて, J・フィンの成長曲線による市場実験は, 非コントロール・グループおよびコントロール・グループの累積売上高を的確に評価しているといえるよう。

6-2 結果の考察

図2は, 前記の表9をグラフ化したものである。これを見ると, 非コントロール・グループに対応する成長曲線に, 減衰効果 (decay effect) が明確に現われている。売上高の増加程度は, コントロール・グループでは1店当たり毎週約12.3袋で, 安定した成長を示している。前述のプロモーション戦略についていえば, 増加程度は週当たり40.1袋で始まり, 実験の最終段階で13.2袋に減少している。この発見は, きわめて重要である。もしも, 売上高の変化傾向が継続した場合, 非コントロール・グループでのアクション・プログラムが若干長期的に見て有効と判断できるなら, 2種のプログラムは, 市場実験の終了まぎわでその効果性に差がなくなると思われるからである。

かかる判断は t 検定で得られるものと異なり, マーケティング・マネジャーやリサーチャーの直観 (intuition) に依存する。直観とは, ある事態

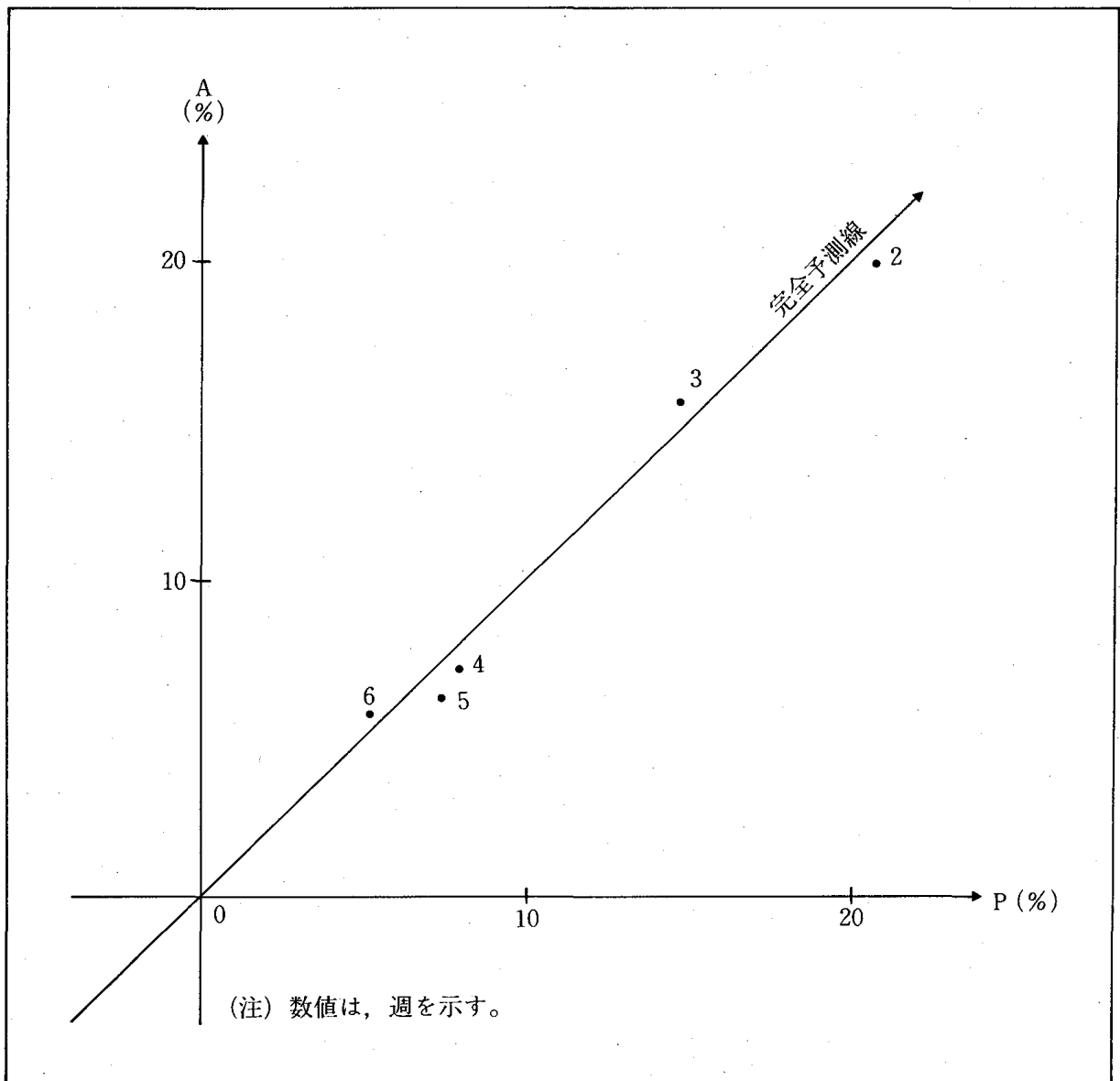


図2-(a) 非コントロールグループの場合の予測-実績図表

の直接的、個人的全体像に基づく認識であり、意思決定者にとって問題解決や決断のあらゆるプロセスで流入する。危険な投資を含むマーケティング意思決定では、直観を無視することはできない。直観的表出は正当化の基礎が欠けているため、組織内で合意形成が得られにくい。アクション効果の測定に関する分析結果の解釈では、直観は重要な役割を果たすといえよう。その理由は、効果の予測の背後にある要因と相互作用を理解し、そこから将来の傾向を発見するための早期指標を引出すことが重要となるからである。

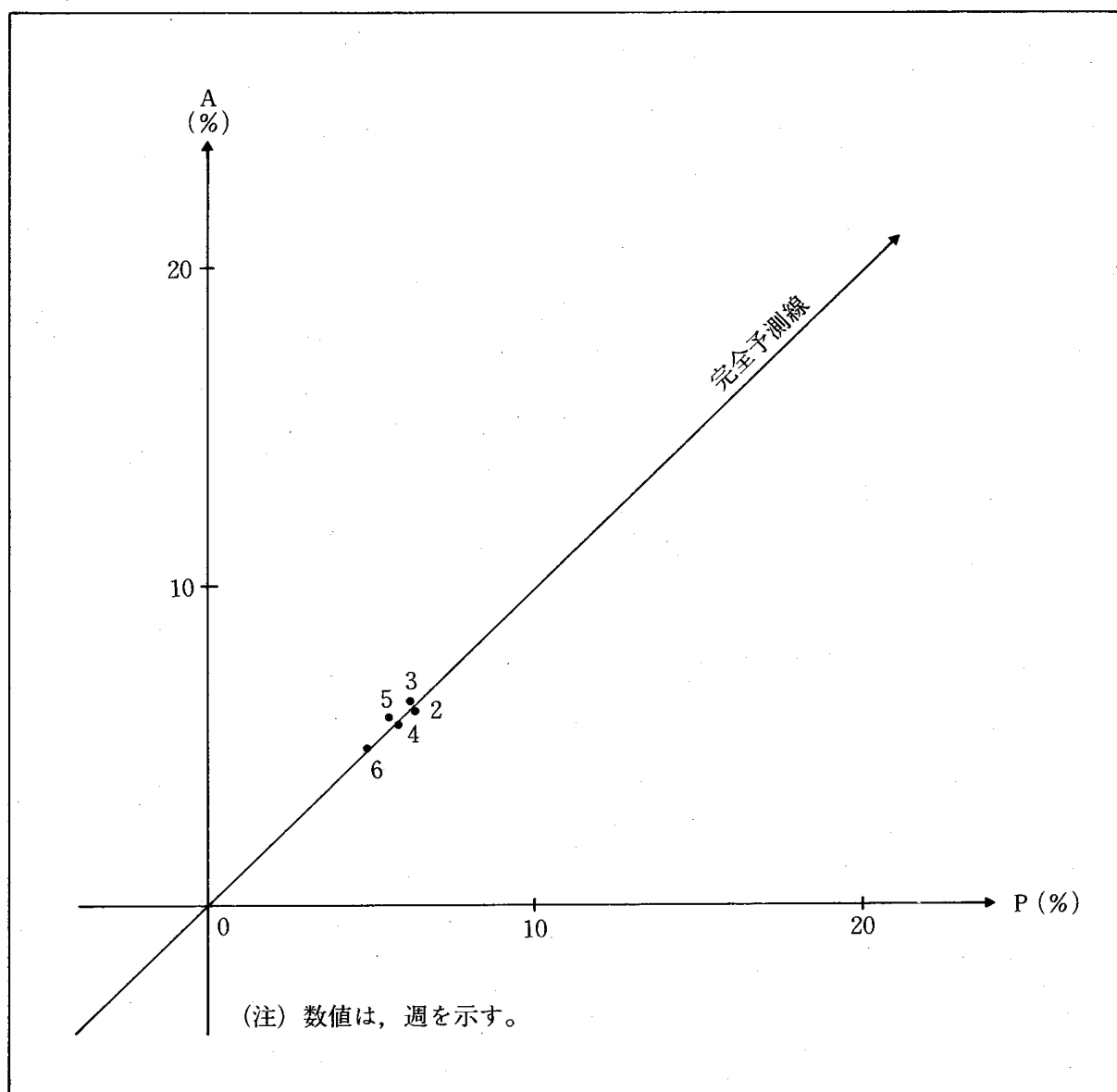


図2-(b) コントロールグループの場合の予測-実績図表

話を本論に戻せば、 t 検定の結果は、大型キャンペーンの売上高に対する直接的効果を指摘している。以上のアプローチは、マーケティング・マネジャーの意思決定のツールとして貴重な役割を果たすといえよう。すなわち、実験データに基づく成長曲線の図式化は、売上高の変化やアクション効果を視覚的に把握することができる。代替的プロモーション・プログラムの相対的效果を評価する場合、いずれのプログラムが効果的かを判断できるはずである。市場実験における成長曲線でのアプローチは、売上高の変化傾向や

ターニング・ポイントを的確に洞察できる有効かつ手軽なツールといえよう。

結 語

企業が行なう市場実験は、一般的に、結論導出までの時間的余裕が十分あるとはいいがたい。加えて、意思決定者であるマーケティング・マネジャーは、統計解析の専門家とは限らない。したがって、実験データの解析は、次の3種の条件を満足するモデルの選択が望ましい。すなわち、

- (1) 小数サンプルの時系列データの取扱いに、十分対応できること。
- (2) アクション効果の測定という観点から、計測結果の解釈や判断が容易なこと。
- (3) 計算が単純であること。

本小冊子は、上記の3条件を満足しうるアプローチとして、J・フィンの成長曲線を紹介し、現実の取扱いを実際例で示した。当該アプローチは、実験サブジェクト毎に等間隔でデータを収集するという制約条件があるものの、他の手法に比較して実用性の点でメリットを見出せる。事例で見たようなプロモーションと売上高との関連以外に、広くマーケティング・アクションの効果測定の問題に、このアプローチが役立つ場は多数存在する。たとえば、広告、価格、パッケージング、プロダクト・デザインなども分析の潜在的な候補となりうる。いずれの場合においても、非コントロール・グループとコントロール・グループ間の差異のみが、マーケティング努力を示唆すると理解しなければならない。少数サンプルのデータから正当な手続きをふんで、しかも簡便に貴重なインテリジェンスが導出できる成長曲線アプローチは、市場実験におけるアクション効果の測定という課題に対して、利用面での大きなポテンシャルを有するといえるであろう。

アクション効果の測定では、恣意性を免れたものでなければならない。分析結果は、その結果の解釈のために判定者に最高の正確さと見識が求められ

るとはいえ、人間の判断によってくもらされてはならないのである。

APPENDIX

1. パラレリズムの決定とダミー回帰モデル

第3章で述べたパラレリズムの決定に用いるダミー回帰モデルの取り扱いに関して、その骨子を要約する。

説明を具体化するために、本文で採用した事例を再度用いる。パラレリズムの決定は、表2に見る5種類の実用的と思われるダミー回帰モデルの適用が基本である。事例における ${}_{30}\mathbf{Z}_6$ 行列をベースに、モデル No. III の2次曲線対応型を例として説明する。

ダミー回帰モデルの計測式を、 $i=1, 2, \dots, 30$ として、以下に記す。

$$z_{i3} = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \beta_d d \quad (33)$$

目的変数と説明変数の指定は、表11に載せてある。

結論的にいえば、この場合、目的変数は ${}_{30}\mathbf{Z}_6$ 行列の第3列のスコア、説明変数は同じく第1列、第2列のスコアに、ダミー変数が第3の変数として追加される。同様に、モデル No. IV の1次式対応型では、目的変数は第2列のスコア、説明変数は第1列のそれであり、ダミー変数が第2の変数として

表12 モデル No. III の2次式対応型ダミー回帰モデルにおける計測結果

| 項 目 | 計 測 結 果 | | |
|-------------------------------|---|----------|---------|
| | 推 定 値 | 標準誤差 | t 値 |
| 定 数 項： $\hat{\beta}_0$ | -117.77007 | 37.15298 | 3.16987 |
| z_{11} の係数： $\hat{\beta}_1$ | 0.21906 | 0.06670 | 0.30448 |
| z_{12} の係数： $\hat{\beta}_2$ | -0.00163 | 0.07388 | 0.02206 |
| z_{13} の係数： $\hat{\beta}_3$ | -50.29061 | 11.07359 | 4.54149 |
| 備 考 | <div> <div>モデルの標準誤差 S</div> <div>S = 2.01050</div> </div> <div> <div>自由度修正済み重決定係数 \bar{R}^2</div> <div>$\bar{R}^2 = 0.96553$</div> </div> | | |

導入されることになる。かかる仕組で、ダミー回帰モデルのインプット・データが完備されるのである。ダミー変数は、非コントロール・グループに属する No. 1～No. 15 の店舗に対して 1，コントロール・グループの No. 16～No. 30 の店舗に 0 を与えてある。

参考までに、表12にモデル NO. Ⅲ の 2 次式対応型での計測結果を載せておく。

2 平均 2 乗予測誤差の成分分解

平均 2 乗予測誤差 MSPE が、本文第 6 章の(32)式で与えられることを説明する。まず、次の記号を定義する。

A ：実績に対する前期変化率

P ：予測値の実績に対する前期変化率

T ：計測期間数 ($t = 2, 3, \dots, T$)

P_t と A_t に関する平均、分散、相関係数は、各々以下のようになる。

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T P_t \quad (34)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T A_t \quad (35)$$

$$s_P^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - \bar{P})^2 \quad (36)$$

$$s_A^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (A_t - \bar{A})^2 \quad (37)$$

$$r_{P,A} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - \bar{P})(A_t - \bar{A})}{s_P s_A} \quad (38)$$

A_t および P_t の系列に対して、

$$A_t = \gamma_{P,A} + \delta_{P,A} P_t \quad (39)$$

なる線型関係を考える。 $P_t = A_t$ という完全予測が成立つためには、 $\gamma_{P,A} = 0$ ，

$\delta_{P,A} = 1$ となる必要がある。(39)式における定数項およびスロープ係数の推定値 $\hat{\gamma}_{P,A}$, $\hat{\delta}_{P,A}$ は OLS を用いて,

$$\begin{aligned}\delta_{P,A} &= \frac{\sum_{t=2}^T 2(P_t - \bar{P})(A_t - \bar{A})}{\sum_{t=2}^T (P_t - \bar{P})^2} \\ &= \frac{\gamma_{P,A} s_A}{s_P}\end{aligned}\quad (40)$$

$$\hat{\gamma}_{P,A} = \bar{A} - \hat{\delta}_{P,A} \bar{P} \quad (41)$$

で与えられる。かくて、平均 2 乗予測誤差 MSPE は,

$$\begin{aligned}\text{MSPE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \{(\bar{P} - \bar{A}) + (P_t - \bar{P}) - (A_t - \bar{A})\}^2 \\ &= (\bar{P} - \bar{A})^2 + (s_P - \gamma_{P,A} s_A)^2 + (1 - \gamma_{P,A}^2) s_A^2 \\ &= (\bar{P} - \bar{A})^2 + (1 - \delta_{P,A})^2 s_P^2 + (1 - \gamma_{P,A}^2) s_A^2\end{aligned}\quad (42)$$

と分解される。(42)式の右辺第 1 項, 2 項, 3 項を MSPE で除したものを U^M , U^R , U^D とおけば,

$$U^M = \frac{(\bar{P} - \bar{A})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2} \quad (43)$$

$$U^R = \frac{(1 - \hat{\delta}_{P,A})^2 s_P^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2} \quad (44)$$

$$U^D = \frac{(1 - \gamma_{P,A}^2) s_A^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2} \quad (45)$$

である。ここに,

$$U^M + U^R + U^D = 1 \quad (46)$$

である。以上が、平均 2 乗予測誤差の構成成分の分解である。

3 OLCF 法の導入

H・タイルの OLCF 法は、従来、短期経済予測の分野で活用されてきたが、ここでは直交多項式による翌週の累積売上高予測の修正に採用する。 P_t と A_t のデータ系列から、MSPE とその構成成分率が所与であるとする。以後のアプローチは、次の手順にしたがう。

(手順1) 前記(40)式を用いて、回帰モデルの未知パラメータの推定値 $\hat{\gamma}_{P,A}$ と $\hat{\delta}_{P,A}$ を導出する。

(手順2) 翌週の累積売上高の予測値 \hat{y}_{T+1} を修正する。このとき、 $\hat{P}_{T+1} = \frac{\hat{y}_{T+1}}{y_T}$ を求めておく。修正売上高変化率を $^* \hat{P}_{T+1}$ とすると、

$$^* \hat{P}_{T+1} = \hat{\gamma}_{P,A} + \hat{\delta}_{P,A} \hat{P}_{T+1} \quad (47)$$

となる。

(手順3) 予測値の修正を行なう。求める修正済予測値を $^* \hat{y}_{T+1}$ と略記する。

$$^* \hat{y}_{T+1} = (1 + ^* \hat{P}_{T+1}) y_T \quad (48)$$

として、予測の修正がなされる。ここに、 y_T は、実績最終時点の累積売上高を示す。

事例における非コントロール・グループとコントロール・グループの翌週に関する予測の修正を行なう。本来ならば、実験値の適合度から見て予測値の修正は不要であるが、OLCF 法の説明用として取りあげたまでである。

修正予測値などは、表10に要約してある。

OLCF 法の意図は、計測期間中に系統的な誤差が存在し、しかも短期予測に影響を与えると考えられる場合に、その管理可能な成分の度合いを極力小さくするように予測の修正を行なう点にあるといえよう。

4 平均2乗予測誤差の意味

平均2乗予測誤差 MSPE の意味を理解するには、実績 A_t と予測値 P_t の差の2乗に対する期待値 (Expected Squared Error, 略して ESE) を導入すると便利である。

$$\text{ESE} = E(A_t - P_t)^2 \quad (49)$$

母集団においては、MSPE の考察は、ESE で代替しうる。ESE の構成を理解することは、予測誤差を診断する際の有力な助けとなる。(49)式を拡張するために、以下の定義を必要とする。

μ_A, μ_P : A_t と P_t に関する母平均

δ_A, δ_P : A_t と P_t に関する母標準偏差

ρ : A_t と P_t の母相関係数

$$\begin{aligned} E(A_t - P_t)^2 &= E(A_t^2 - 2A_tP_t + P_t^2) \\ &= E(A_t^2) + E(P_t^2) - 2E(A_tP_t) \end{aligned} \quad (50)$$

ここで、

$$\delta_A^2 = E(A_t^2) - \mu_A^2 \quad (51)$$

$$\delta_P^2 = E(P_t^2) - \mu_P^2 \quad (52)$$

$$E(A_t^2) = \delta_A^2 + \mu_A^2 \quad (53)$$

$$E(P_t^2) = \delta_P^2 + \mu_P^2 \quad (54)$$

(53)式と(54)式を、それぞれ(50)式に代入する。

$$E(A_t - P_t)^2 = \delta_A^2 + \mu_A^2 + \delta_P^2 + \mu_P^2 - 2E(A_tP_t) \quad (55)$$

(55)式の右辺第5項は、次のように変形できる。

$$-2E(A_tP_t) = -2[\mu_A\mu_P + \text{COV}(A_t, P_t)] \quad (56)$$

(56)式を、(55)式に代入し整理する。

$$\begin{aligned} E(A_t - P_t)^2 &= \delta_A^2 + \mu_A^2 + \delta_P^2 + \mu_P^2 - 2\mu_A\mu_P - 2\delta_P\delta_P \\ &= (\mu_A^2 - 2\mu_A\mu_P + \mu_P^2) + (\delta_P^2 - 2\delta_P\delta_P + \rho^2\delta_A^2) \\ &\quad + (\delta_A^2 - \rho^2\delta_A^2) \\ &= (\mu_A - \mu_P)^2 + (\delta_P - \rho\delta_A)^2 + (1 - \rho^2)\delta_A^2 \end{aligned} \quad (57)$$

上記の(57)式は、ESE の構成成分の内容を示している。いうまでもなく、 $E(P_t) = E(A_t)$ ならば、(57)式の右辺第1項は0となる。ここで、 δ_A^2 は、次のように2項の和に分割される。

$$\delta_A^2 = \rho^2\delta_A^2 + (1 - \rho^2)\sigma_A^2 \quad (58)$$

この事実、 A_t 系列の P_t 系列に対する回帰関係を示唆する。 $\rho^2\delta_A^2$ は、予測値系列 P_t によって計測された実績系列 A_t のバリエーションを、 $(1 - \rho^2)$

δ_A^2 は管理不能なランダム・エラーとみなしうる。かくて、 $\delta_P^2 = \rho^2 \delta_A^2$ ならば、 $\delta_P = \rho \delta_A$ となり、(58)式の右辺第2項は0となる。これが事実でないならば、第2項は0にはならない。換言すれば、 A_t の P_t に対する回帰直線のスロープ係数の大きさが、1.0より乖離している程度を意味する。スロープ係数が1.0ならば、 $E(P_t) = E(A_t)$ となり、(49)式に見るESEは、

$$\begin{aligned} \text{ESE} &= E(A_t - P_t)^2 \\ &= (1 - \rho^2) \delta_A^2 \end{aligned} \quad (59)$$

となる。すなわち、これは、前述の線型回帰方程式の誤差分散 (residual variance) に相当する。かくて、 $(\mu_A - \mu_P)^2$ は、実績 A_t と予測値 P_t の平均値の相違に基づくバイアスの程度を示すことになる。また、 $(\delta_P - \rho \delta_A)^2$ は、回帰係数の不良による予測の非能率性を意味するといえよう。本文(32)式で示したH・タイルの公式は、(57)式による成分分解のサンプルに基づく推定を期間当たりの大きさとして表現したものである。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (P_t - A_t)^2 &= (\bar{P} - \bar{A})^2 + (s_P - r_{P,A} s_A)^2 + (1 - r_{P,A}^2) s_A^2 \\ &= (\bar{P} - \bar{A})^2 + (1 - \hat{\delta}_{P,A}^2) s_P^2 + (1 - r_{P,A}^2) s_A^2 \end{aligned} \quad (60)$$

ここに、

\bar{P}, \bar{A} : P_t と A_t に関するサンプル平均

s_P, s_A : P_t と A_t に関するサンプルの標準偏差

$r_{P,A}$: 同じく、サンプルの相関関数

$\hat{\delta}_{P,A}$: A_t の P_t に対する線型回帰方程式のスロープ係数

t : 時点 ($t = 2, 3, \dots, T$)

注

- 1) R. E. Frank, P. E. Green (1967), "Quantitative Methods in Marketing", Prentice-Hall, Inc., 土岐坤訳 (1973), 「マーケティングに必要な計量技法」, ダイアモンド社, p. 68.
- 2) ARMA モデルは, Autoregressive Moving Average モデルの略称で, 時系列モデルの典型である。これは, 時系列 y_t (t は時点) が所与のとき, 当期の値が過去における y の加重和とランダム・エラーの和で表現する AR (P) モデルと, 現在および過去のその期独特のランダム・エラー ϵ_t の加重和で現在の y_t を説明

する MA (q) モデルの混合タイプで, ARMA (p, q) と略記される。

$$y_t = \xi + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \quad (61)$$

より簡潔に,

$$\Phi_p(B) y_t = \xi + \Theta_q(B) \varepsilon_t \quad (62)$$

ここに, B は逆演算子 (backward shift operator) で, $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$ と定義されている。 ξ , ϕ_1 , ϕ_2 , \cdots , θ_1 , θ_2 , \cdots などはモデルの未知パラメータ, ε_t はホワイト・ノイズと呼ばれる誤差項である。当該モデルは, 各期の経済現象を種々の可能性の中から確率的に実現した事象として把握し, その系列を分析する意図をもつ。換言すれば, 対象とする経済現象を確率過程として捉える分析手法で, 継続的に測定された観測値に, 高度の従属性が認められる場合に適する手法である。いま, $p=1$, $q=1$ なる ARMA (1, 1) モデルは,

$$y_t = \xi + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (63)$$

と表現される。ARMA (p, q) モデルは経済現象の背後にある因果関係ないし構造的関係を考察することは不可能であるが, データのもつ情報を引出し変数相互の関係を解析するには適している。ただし, 望ましくは100個以上の観測値が必要であり, 市場実験データの解析には不向きといえよう。

- 3) Jeremy Finn (1969), "Multivariate Analysis of Repeated Measures Data", Multivariate Behavioral Research, 4 (July), pp. 391-410.
- 4) R. Darrel Bock (1975), "Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research", McGraw-Hill Book Company.
- 5) Henri Theil (1966), "Applied Economic Forecasting", North-Holland Publishing Company.

参考文献

- 1) Greg J. Lessne and R. Choudary Hanumara (1988), "Growth Curve Analysis in Marketing: Method and Application", Journal of Marketing Research, XXV (November), pp. 391-396.
- 2) Richard Bellman (1974), "Introduction to Matrix Analysis, 2nd Edition", McGraw-Hill Book Company.
- 3) John Neter, William Wasserman, Michael H. Kutner (1989), "Applied Linear Regression Models, 2nd Edition", Richard D. Irwin. Inc.
- 4) 大石展緒, 大石迪夫共著 (1978), 「販売予測入門: データ分析から予測へのアプローチ」, 東洋経済新報社, pp. 133-175.
- 5) 鈴木久子, 大石展緒, 荻津好文共著 (1972), 「実例による需要予測の技法」, 日刊工業新聞社, pp. 121-182.
- 6) Michael J. Ryan (1978), "Analyzing Models with Multiple-outcome Variables", Decision Sciences, (9), pp. 596-611.
- 7) Mark M. Moriarty (1985), "Design Features of Forecasting Systems Involving Management Judgements", Journal of Marketing Research, XXII (November), pp. 362-363.

- 8) 田口玄一著 (1977), 「実験計画法 (下)」, 第3版, 丸善, pp. 587-609.
- 9) 大石展緒著 (1991), 「PC 9801による市場実験データの解析マニュアル」, (株)アイ・エム・シー開発, 未公開