〈経営研究　第５巻　第２号　平成４年３月〉

意思決定のためのノンパラメトリック統計

――２組の独立な標本の場合――

斎　藤　孝　一

◆キーワード：
中央値検定（median test）　カイ自乗検定（χ^2 statistic）　ワルド－オルフォウィッツのラン検定（Wald—Wolfowitz number of runs test）　２組の独立な標本（two independent samples）　フィッシャーの検定（Fisher test）

１．２組の独立な標本と統計的検定

２つのグループ間の違いを調べるにあたって注意すべきことは，２つのグループが関連性を持つものであるのかまったく独立したものであるのかということである。

２つのグループが関連性を持たない標本，すなわち２組の独立な標本の場合，２組の標本は等しい大きさであるとは限らない点に注意する必要がある。

２組の独立な標本からデータを解析するための通常のパラメトリック統計は，２グループの平均へｔ検定を適用することである。ｔ検定は次のような前提を持っている。[1)]

(1)　データ（平均の計算に使われた）は，等分散の正規分布をする母集団からの独立な観測結果である。

(2)　算術的に計算される平均等の統計量を使用するので，観測値は少なくとも間隔尺度で測定されることが必要である。[2)]

したがって，上記の前提を満たさない場合はｔ検定を使用することができない。その場合２組の独立した標本に対するノンパラメトリック検定を使用することになる。

2． 2組の独立標本とノンパラメトリック検定

２組の独立した標本に対するノンパラメトリック検定は，２組の独立標本が同一集団からのものであるかどうかを検定する。[3]

(1) 中央値検定

中央値検定は２つの独立したグループは同じ中央値を持つ集団から抽出されたものであるかどうかを検定するものである。[4] 帰無仮説及び対立仮説は次の通りであり，２つのグループのデータが少なくとも順序尺度であることが必要である。帰無仮説は２つのグループは同じ中央値を持つ母集団から抽出された，ということである。対立仮説は両側検定の場合，一方の母集団の中央値は他方の母集団の中央値と異なるというものであり，片側検定の場合，一方の母集団の中央値は他方の母集団の中央値より高いである。

中央値検定を行う場合，まず両標本の全体のデータに対する中央値を計算する。次にこの中央値で２つの標本を表１のように２×２分割表に分類する。

表１ 中央値検定

	Ⅰ	Ⅱ	計
中央値より上のデータ数	A	B	A＋B
中央値より下のデータ数	C	D	C＋D
計	A＋C	B＋D	$N = n_1 + n_2$

〔出処：ジーゲル（1983）ｐ.116〕

グループⅠとグループⅡの両方が中央値の等しい母集団から抽出されたとすると各グループのデータのうち半分は中央値より上にあり，半分は下にあることが期待される。すなわちＡの度数とＣの度数が等しく，Ｂの度数とＤ

の度数が等しいことが期待される。

Aをグループ1における中央値より上のデータ数，Bをグループ2における中央値より上のデータ数，Cをグループ1における中央値より下のデータ数，Dをグループ2における中央値より下のデータ数とすると，帰無仮説，H_0：$A=1/2 \cdot n_1$ かつ $B=1/2 \cdot n_2$ のもとでのAとBの標本分布は超幾何分布をすることが知られている。[5] すなわち，

$$P(A, B)=\frac{\binom{A+C}{A}\binom{B+D}{B}}{\binom{n_1+n_2}{A+B}} \tag{1}$$

である。

以上のように中央値に従ってデータが分類されたならば，以下の基準によって統計的検定を決定する。[6]

1．n_1+n_2 が40より大きいとき，連続補正を施した x^2 を適用する。
   すなわち，

$$x^2=\frac{N(|AD-BC|-N/2)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \quad df=1 \tag{2}$$

   を使用する。

2．n_1+n_2 が20と40の間で，かつ5より小さい期待度数が一つもないとき，連続補正を施した x^2 を適用する。最小の期待度数が5より小さいとき，Fisherの検定を適用する。

3．n_1+n_2 が20より小さいときFisherの検定を適用する。

次に，以上の条件から選択された検定によって導き出された確率Pが危険率 α に等しいかそれより小さい場合，帰無仮説 H_0 を棄却する。

(2)　フィッシャーの直接確率検定

フィッシャーの直接確率検定は２組の独立な小さい標本に適用され，名義尺度または順序尺度の離散型データを分析するのに特に有用なノンパラメトリック検定法である。[7)]

２組の独立なランダム標本からのデータは２つの互いに背反的なクラスのいずれか一方に類別される。これらのデータは表２のように２×２分割表における度数として表わされる。

表２　２×２分割表

	－	＋	計
グループⅠ	A	B	A＋B
グループⅡ	C	D	C＋D
計	A＋C	B＋D	N

〔出処：ジーゲル（1983）p.102〕

グループⅠおよびグループⅡは任意の２つの独立なグループである。A，B，C，Dは度数である。この検定は，２つのグループが２つの分類に対してとる比率に差があるかどうかに基づくものである。表２のように観測された事象の確率は次の超幾何分布で求められる。

$$P=\frac{\binom{A+C}{A}\binom{B+D}{B}}{\binom{N}{A+B}}$$

$$=\frac{\left(\frac{(A+C)!}{A!C!}\right)\left(\frac{(B+D)!}{B!D!}\right)}{\frac{N!}{(A+B)!(C+D)!}}$$

$$=\frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{N!A!B!C!D!} \qquad (3)$$

また，Ｐの正確な値よりも有意水準に関心がある場合には，Fisher の検定におけるＤ（またはＣ）の臨界値の表を使用することによって，２×２分割表の観測値の値の有意性を直接決定できる。[8)]

(3) ２組の独立な標本に対する x^2 検定

データが離散的なカテゴリーにおける度数からなるとき，x^2 検定は２つの独立なグループ間の差の有意性を決定するために使うことができる。必要とする尺度は，名義尺度であればよい。[9)]

検定するための仮説は，２つのグループはある特性に関して差異があり，したがっていくつかのカテゴリーに分類されるグループのメンバーの相対度数には差があるというものである。

帰無仮説は次の x^2 の値を使って検定される。

$$x^2=\sum_{i=1}^{r}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \tag{4}$$

ただし，

O_{ij}：ｉ行ｊ列にカテゴリ化されている観測数

E_{ij}：ｉ行ｊ列にカテゴリ化されるべき H_0 のもとでの期待される数

$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}$：すべての（ｒ）行とすべての（ｋ）列にわたって加えること，すなわち，すべてのセルについて加えることを表わす。

式(4)の x^2 は近似的に df＝（ｒ－１）（ｋ－１）のカイ２乗分布にしたがう。ｒは分割表の行の数，ｋは分割表の列の数である。各セルの期待度数は，そのセルに関する２つの周辺和の積をとり，その積を総数Ｎで割ることによって求められる。たとえば表１の場合，Ａの期待度数は（Ａ＋Ｃ）（Ａ＋Ｂ）／Ｎ，Ｂの期待度数は（Ｂ＋Ｄ）（Ａ＋Ｂ）／Ｎ，Ｃの期待度数は（Ａ＋Ｃ）（Ｃ＋Ｄ）／Ｎ，Ｄの期待度数は（Ｂ＋Ｄ）（Ｃ＋Ｄ）／Ｎである。

観測度数と期待度数がほぼ一致するならば差 $(O_{ij}-E_{ij})$ は小さな値を持ち，したがって x^2 も小さな値をもつことになる。x^2 の値が小さいならば，２つ

の特性は互いに独立であるという帰無仮説は棄却されない。

ふつう x^2 検定を利用するには2×2分割表に観測度数を分類し，H_0 のもとで起こりやすいかそうでないかを検定する。r及びkがともに2の場合にデータを適用すると，x^2 は式(5)のように表わされる。

$$x^2=\frac{N(|AD-BC|-N/2)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \quad df=1 \tag{5}$$

この式(5)は，式(4)に比べて計算が容易であり，また計算結果をカイ2乗分布に近似させるために連続補正がなされている。

x^2 検定は分割表内のデータが十分大きな期待度数をもつ場合のみ適用できる。観測された期待度数が要求を満足しない場合には，各期待度数を増加させるために，セルの結合すなわち隣接するクラスの結合を行い，それによってセルの数を減少させる。このような結合はデータの持つ意味が失われない限りにおいてのみ正当に行うことができる。したがって，分析に使用するクラスの数に応じてあらかじめ十分大きいデータを収拾しておかなければならない。[10]

したがって，2組の独立な標本に x^2 検定を使用するためには次のような手順をふむことになる。[11]

1．観測度数をk×r分割表で表わす。グループに対してはk列，条件に対してはr行を当てる。
2．各セルに対し，それに共通する2つの周辺和の積をとり，その積をNで除して期待度数を求める。Nは各グループの周辺和の合計，すなわち互いに独立な観測値の合計である。
   この手順2はデータが2×2分割表で表わされている場合には不要であり，式(5)が用いられるべきである。
3．2×2分割表の場合式(5)を用いて x^2 を計算する。rが2より大きい場合式(4)を用いて x^2 を計算する。
4．カイ2乗の臨界値の表を参照して，計算された x^2 の有意性を決定す

る。片側検定の場合には，示された有意水準を半分にする。カイ２乗の臨界値の表より与えられた確率が α に等しいか，それより小であれば H_1 を支持して，H_0 を棄却する。

(4) ワルドーオルフォウィッツのラン検定

ワルドーオルフォウィッツのラン検定は，２つのグループは何らかの点で異なるという対立仮説に対して，２組の独立な標本は同一母集団から抽出されたものであるという帰無仮説を検定するために使用される。[12)]

多くの検定では，２つのグループ間の特殊な種類の差を扱う。たとえば中央値検定では２組の標本は同一の中央値を持つ母集団から抽出されたものであるかどうかを決定する。これに対して，ワルドーオルフォウィッツのラン検定は，あらゆる種類の差を扱う。したがって，この検定は広範な種類の対立仮説を検定するために使用される。

ワルドーオルフォウィッツの検定はデータが連続分布を持つことを仮定しており，少なくとも順序尺度であることが必要である。大きさがそれぞれ n_1, n_2 の２つの互いに独立した標本のデータにこの検定を適用するためには，まず，n_1+n_2 個のデータを昇順に順位づけする。次に，この順序づけられた系列のランの数を決定する。ここでランは同一グループからの列と定義される。たとえば，グループＡとグループＢが表３のとおりであったとすると，これらの７つのデータを表４のような昇順に順序づけられた系列に直し，グ

表３

グループＡ	12	16	8	
グループＢ	11	6	6	3

〔出処：ジーゲル（1983）p.143〕

表４

3	6	6	8	11	12	16
B	B	B	A	B	A	A

〔出処：ジーゲル（1983）p.143〕

ループ名をつける。
次に表4からAの符号とBの符号の生起の順序を調べ，ランに数を決定する。すなわちBのラン，Aのラン，Bのラン，Aのランの4つのランが起きたことがわかる。

2つの標本が同一母集団からぬかれたものとすると，つまりH_0が真であるならば，AとBのデータはよく混ざり合っていると期待される。したがってH_0が真であるならば，AとBが交互に現われ，ランの数Rは相対的に大きくなる。

H_0が真でないならばRは相対的に小さい。たとえば，2つの標本が異なる中央値を持つ母集団から抽出され，Aのケースが抽出された母集団はBのケースが抽出された母集団よりも中央値が高いとすると，2組の標本の順序づけられた系列においては，系列の低い方の端に長いBのランができ，高い方の端にAのランができ，その結果ランの数Rは相対的に小さくなることが期待される。

また，標本がばらつきの異なる母集団から抽出されたとする。Aのケースが抽出された母集団は広く散らばっており，Bのケースが抽出された母集団は均質かまとまっているとすると，順序系列の両端に長いAのランができ，相対的にランの数の値は小さくなると予想される。

したがって，一般にランの数Rが極めて小さいならば，帰無仮説H_0は棄却される。

ランの数Rの標本分布は次のことに基づいている。2つの異なった対象，たとえばn_1とn_2が同一線上に配置されているとき，異なる可能な配置の総数は，

$$\binom{n_1+n_2}{n_1}=\binom{n_1+n_2}{n_2} \tag{6}$$

である。[13)]

観測したRの値の有意性を決定する方法はn_1及びn_2の大きさに依存す

る。すなわち，n_1 と n_2 が両方とも20かそれ以下の場合には，「ラン検定におけるRの臨界値の表」より，有意水準0.05におけるRの臨界値が得られる。Rの値が n_1 と n_2 の値に対する表中の値に等しいかそれ以下の場合，帰無仮説は $\alpha=0.05$ で棄却される。

n_1 か n_2 のどちらかが20より大きい場合には

$$z=\frac{R-\mu}{\sigma}=\frac{R-\left(\frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1\right)}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}} \tag{7}$$

または

$$z=\frac{|R-\mu|-0.5}{\sigma}=\frac{\left|R-\left(\frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1\right)-0.5\right|}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}} \tag{8}$$

が用いられる。すなわち n_1 か n_2 が20より大きい場合には「ラン検定におけるRの臨界値の表」は使用できない。しかし，このような大きい標本に対しては，Rについての H_0 のもとでの標本分布は，

$$\text{平均}=\mu=\frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1$$

$$\text{標準偏差}=\sigma=\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}$$

の正規分布に近似する。

したがって，式(7)は近似的に平均0，分散1の正規分布をするので，「正規分布におけるzの観測値と同程度極端な値に関連する確率の表」を大標本に対するRの値の有意性を決定するために使用することができる。

また，Rの経験的な値の分布は離散的でなければならないのに対して，大標本については連続的な正規分布で標本分布を近似するので，連続のための補正を施す必要がある。連続補正は式(8)によって計算され，計算されたzの値がαと等しいかそれ以下の関連した確率pを持つならば，帰無仮説は有意水準αで棄却される。[14)]

適用例：

2組の独立した標本が同じ母集団から抽出されるか否かに関心がある。2組の独立した標本が同じ母集団から抽出されたならば，各標本の約半数が結合した標本の中央値より上にあり，半数が結合した標本の中央値より下にあると期待される。中央値より上及び下の観察数にもとづいた中央値検定としてしられる検定は次のように展開される。[15)]

保険会社が，保険証書所有者によってなされる支払請求の大きさには男性と女性とでは大きな差があるかどうかを知りたいと思っている。表5には14人の男性と16人の女性の請求の標本が与えられている。合計30の標本の中央値は68.5である。

表5　男性と女性の保険証書所有者の支払請求の大きさ

男　性（£）	62	38	43	79	77	23	11	
	52	33	41	70	49	69	43	
女　性（£）	93	101	72	118	100	45	68	85
	72	47	83	92	106	63	66	81

〔出処：Dickinson（1990）p.140〕

2標本の中で中央値より上及び下の観察数は表6に示される。（　）の中の

表6

	男　性	女　性	計
中央値より上のスコアの数	4（7）	11（8）	15
中央値より下のスコアの数	10（7）	5（8）	15
計	14	16	30

値は期待値である。たとえば7＝(14)(15)/30。

いま40≧N≧20であり，期待度数はすべて5以上であるのでx^2検定，式(5)を適用することになる。[16] すなわち，

A＝4，B＝11，C＝10，D＝5

$$x^2=\frac{30(|4\times5-11\times10|-30/2)^2}{15\times15\times14\times16}$$

$$=2430／50400$$

$$\fallingdotseq3.35$$

したがって，検定は次のとおりである。

1．H_0：標本は同一母集団から抽出される。すなわち，男性と女性の間には差がない。

　H_1：標本は同一母集団から抽出されない。すなわち，男性と女性では差がある。

2．$\alpha=0.10$

3．統計的検定：x^2検定

　自由度は（2－1）（2－1）＝1である。

　これはH_0が真であるならば${x_1}^2$分布し，${x_1}^2$の臨界値は2.71である。

4．標本結果：${x_1}^2=3.35$

5．H_0は棄却される。すなわち，男性と女性とでは差がある。

代替的な手続は昇順の順序で2つの母集団からの標本としてとられた結合数値としてデータを並べ,同一標本の連続したランの数を数えることである。これはワルドーウォルフォウィッツのラン検定として知られている。2つの母集団が同一であるという帰無仮説のもとでは，大きなランの数Rが期待される。実際に結合された標本のデータ数が20よりも大きければ，式(7)のように示される。20以下の結合された標本に対しては，特定の表を用いることが必要である。[17]

いま表5に示された男性と女性の保険証書所有者の支払請求の大きさについてワルドーウォルフォウィッツのラン検定を適用すると以下のとおりになる。

表7　ラン検定のために計算されたデータ

データ：	11	23	33	38	41	43	43	45	47	49	52
男・女：	M	M	M	M	M	M	M	F	F	M	M
ラン：				1				2		3	
データ：	62	63	66	68	69	70	72	72	77	79	81
男・女：	M	F	F	F	M	M	F	F	M	M	F
ラン：			4		5		6		7		
データ：	83	85	92	93	100	101	106	118			
男・女：	F	F	F	F	F	F	F	F			
ラン：					8						

M：男　性　　F：女　性

1．H_0：男性と女性とでは差がない。

H_1：男性と女性の間には差がある。

2．統計的検定：このデータは順序尺度であり，仮説は2つの独立したグループ（男性と女性）の請求高を示すデータについてのどのような違いにも関心があるから，ワルドーウォルフォウィッツのラン検定が選ばれる。

3．有意水準：$\alpha=0.05$　n_1＝男性数，n_2＝女性数

4．標本分布：ランの数Rの標本分布から，n_1，$n_2 \leqq 20$に対する臨界値は，「ラン検定におけるRの臨界値の表」に示されている。

5．棄却域：棄却域は，$n_1=14$，$n_2=16$に対して，H_0のもとでの生起に関連する確率が，$\alpha=0.05$に等しいか，それより小さなRの値のすべてからなる。

6．決定：表6は男性と女性の請求額の大きさを示している。このようなデータからランの数を決定することができる。ランは表7に示されている。これより，$R=8$であることがわかる。

「ラン検定におけるRの臨界値の表」を参照すると$n_1=14$, $n_2=16$のとき，$R=10$が，0.05水準であることがわかる。得られたRの値は，この表よりも小さいから，帰無仮説を棄却できる。男性と女性では請求額に差がみられると結論する。

注

1）S. ジーゲル（1983）p. 101
2）S. ジーゲル（1983）pp. 22～31を参照。

観察結果に割り当てられた数値について，ある一定の演算をほどこすことが可能であるためには，観察結果へ数値を割り当てる方法の構造が演算を含む数的構造と同型でなければならない。

測定の理論は，測定のそれぞれ異なる水準に関して異なる理論をもっている。データのある組に対して許される演算は測定の水準に依存している。測定の水準には，名義尺度（または分類尺度），順序尺度（または順位尺度），間隔尺度，比尺度の4水準がある。

名義尺度：最弱水準における測定法として使用される。数値または他の記号がさまざまな対象をそれが属しているグループへ分類するときに使われるとき，このような数値または記号は名義尺度を構成する。

例：精神科医が患者を「精神分裂症的」「偏執病的」，「躁鬱病的」，「精神神経症的」と類別するとき，これらのクラスは名義尺度である。

順序尺度：より高い，より優先の，より困難な，より騒がしい，より成熟した等のクラス間の関係は，一般的には「より大きい」を意味する＞によって示される。同等なクラスのグループを与えて，すなわちある名義尺度を与えて，関係＞がクラスのすべての対についてではないが，あるものの間で成り立つならば半順序尺度を持ち，関係＞がクラスのすべての対について成り立つならば，順序尺度を持つ。

順序尺度についてのデータの中心的傾向を記述するために最も適切な統計量は中央値である。それは，その上部及び下部にあるデータの数が同一にとどめられているかぎり，任意のデータの変更による影響が中央値には起こらないからである。

例：兵役における階級組織，たとえば，軍曹＞伍長＞兵卒。また，多くの能力検査，適性検査。

間隔尺度：順序尺度のすべての特性を持ち，さらにその尺度に関して任意の2数間の距離すなわち差がわかるような尺度であり，量的尺度である。差の比は測定単位および0点に関して独立である。

例：摂氏及び華氏による温度の測定。温度測定において，測定単位および0点は任意であって，2つの尺度で異なっている。しかし，両尺度は，$F=9/5\cdot C+32$の線形関係にある（F：華氏尺度の温度数，C：摂氏尺度の温度数）。

温度差（間隔）の比は，測定単位及び0点に関して独立である。2つの尺度に関する同一温度の読みは，例えば，

摂　氏	0	10	30	100
華　氏	32	50	86	212

である。一方の尺度に関する温度の読みの間の差の比は，他方の尺度に関する温度の読みの間の差に比と等しい。たとえば，

$$\frac{30-10}{10-0}(\text{摂氏尺度})=\frac{86-50}{50-32}(\text{華氏尺度})$$
$$=2$$

すなわち間隔尺度においては任意の2つの間隔の比は使用される単位および0に関して独立であって，この単位および0点は任意である。

比尺度：間隔尺度の特性のすべてを持ち，さらにその原点として真の0点を持ち，任意の2つの尺度点の比は測定の単位に独立である。すなわち，測定の単位だけが任意である。比尺度においては，次の4つの関係のすべてが操作的に達成可能である。a．同等，b．より大きい，c．任意の2つの間隔の既知の比，d．任意の2つの尺度値の既知の比

例：質量あるいは重量を測定するグラム，オンス，ポンド。任意の2つの重量の間の比は測定の単位に独立である。例えば2つの異なる対象の重量をポンドについてだけでなく，グラムについても決定するならば，2つのポンドの重量の比は，2つのグラムの重量の比に等しい。

3）2組の独立した標本に対するノンパラメトリック検定のうちどの方法がどのような検定に最も適しているかは，ジーゲル（1983）pp. 163～164を参照。

4）計算方法については Dickinson（1990）p. 140及びジーゲル（1983）pp. 115～117を参照。

5）超幾何分布は，たとえば抜き取ったカードを使って分布を作る場合，取り出したカードをもとに戻さないで，抜取を続ける非復元抽出による分布である。

カードをもとに戻す復元抽出の時は各回の確率が一定であるのに対して，非復元抽出では2回め以降の確率は条件付き確率である。

6）データが中央値と同一になる場合，次のいずれかの方法がとられる。ジーゲル（1983）p. 117参照。

(a) n_1+n_2 が大きく，中央値と同一のデータ数が少ないとき，これらのデータを分析からはずす。

(b) グループを中央値を超えたデータと中央値を超えないデータで2分するが，中央値にあたるデータは中央値を超えないものとする。

7）計算方法についてはジーゲル（1983）pp. 101～109を参照。

8）Fisher の直接確率検定のより具体的な手順についてはジーゲル（1983）pp. 102～109を参照。

9）計算方法についてはジーゲル（1983）pp. 109～114を参照。

10）x^2 検定は各セルの期待度数（E_{ij}）があまり小さな値でないことが要求される。

x^2 検定を使用する場合の注意は，次のとおりである（ジーゲル（1983）p. 114)。

a．度数が2×2分割表で表わされる場合

①N＞40のとき，連続補正を施した x^2 を用いる。すなわち式(5)を用いる。

②40≧N≧20の場合，期待度数がすべて5以上のとき，x^2 検定すなわち式(5)を用いる。

最小の期待度数が5より小さいときはFisherの直接確率検定を用いる。

③N＜20のときFisherの直接確率検定を用いる。

b．dfが1より大きい分割表の場合

①kが2以上のとき，5より小さい期待度数をもつセルが全体の20％未満でかつ1より小さい期待度数がなければ，x^2 検定が適用できる。

②x^2 検定は順序の効果に対し鈍感であるので，仮説が順序を考慮している場合には x^2 は最良の検定とはならない。

11) ジーゲル（1983）p. 114

12) 計算方法については，ジーゲル（1983）pp. 142～150

13) ジーゲル（1983）p. 144

14) 標本が抽出された母集団が連続分布であると仮定すると，原理的にはラン検定に用いられるデータにタイは起こらない。しかし，実際には測定上の問題からタイが生じることがある。

すべてのタイが同じ標本内だけで生じた場合にはランの数Rは影響を受けないから，得られた有意水準も影響を受けない。しかし，一方の標本の観測値と他方の標本の観測値との間にタイがある場合には，たとえばＡＢＡにグループ分けした場合とＡＡＢまたはＢＡＡにグループ分けしたものとではランの数は異なるので，唯一のRを得ることができない。Rの値によって H_0 を棄却するか採択するかに違いが生じた場合，それぞれのRの値によって求めた確率Pの平均を用いる。

しかし2つの異なった標本のデータ間のタイの数が大きいならば，Rは決定不可能となりワルドーウォルフォウィッツの検定は適用できない（ジーゲル（1983）p. 150)。

15) Dickinson (1990) pp. 140～141

16) Dickinson（1990）p. 140では次のような式を用いている。

$$x^2=\frac{\{|4-7|-1/2\}^2}{7}+\frac{\{|11-8|-1/2\}^2}{8}+\frac{\{|10-7|-1/2\}^2}{7}+\frac{\{|5-8|-1/2\}^2}{8}=3.35$$

17) Dickinson（1990）の説明はここまでで適用例についてはふれていないので，表5を用いて検定した。

参考文献

上田尚一著『統計用語辞典』1981　東洋経済新報社

白旗慎吾編『パソコン統計解析ハンドブックⅣノンパラメトリック編』1987　共立出版

竹内啓他編集『統計学辞典』1989　東洋経済新報社
S. ジーゲル著　藤本熙監訳『ノンパラメトリック統計学』1983　マグロウヒルブック
J. P. Dickinson, "Statiscal Analysis in Accounting and Finance", 1990, Philip Allan