

# 分散性媒質における波束の実験

竹 山 義 雄

---

◆キーワード：

波束(wave packet)

## 抄 録

分散性媒質における波束の伝わり方を、ゆっくりと観察することが可能な波動実験装置を製作した。装置は、それぞれ長さ55.0 cm、質量331 gの一樣な真鍮棒と、幅5.0 mm、厚さ0.3 mmの鋼帯とから組立てられた連成振動系で、真鍮棒を、その重心より4.35 cmの位置において鋼帯に垂直に、間隔2.50 cmおきに固定したものである。装置は、支台により、真鍮棒は鉛直に、鋼帯は水平になる状態で支えられていて、一端の真鍮棒を数回、正弦的に振動させることにより、波束を送り出した。波束の群速度は約5 cm/s、位相速度は約20 cm/s程度で、波束の先端の波が次第に消衰し、後端に新たに波が発生しながら波束が伝わる様子をゆっくりと観察することができた。また8 mm撮影機、モータードライブによる写真撮影より求められた波束の波形、群速度、位相速度は理論とよく一致した。なお、低周波遮断周波数以下及び高周波遮断周波数以上の振動に対する減衰波についての実験結果も理論とよく一致した。

## 1. はし が き

静かな水面に石を投げ込むと、円形波束が広がってゆく。注意深く観察すると、波束の先端の波は次第に消衰し、波束の後端に新たに波が発生成長しながら波束は群速度で伝わってゆく。また波長の短いさゝ波（表面張力波）の場合は、波束の後端の波が消衰し、波束の先端に新たに波が発生成長しながら波束は群速度で伝わってゆく。この現象は凡ての分散性媒質を伝わる波束、例えば水波、地震波、電離層中の電磁波、物質波等に共通する現象である。この波束の伝わり方、また波束における群速度、位相速度の理解をより容易にするために、ゆっくりと波束の伝わり方を観察することができる実験装置を製作したので報告する。また例えば、電離層における電磁波の全反射の現象に関する減衰波についても実験で示すことができるので併せて報告する。

## 2. 実 験 装 置

### 2.1 実験装置の概略

写真1は装置の写真、図1は装置の一端の波源部近傍の概略図である。

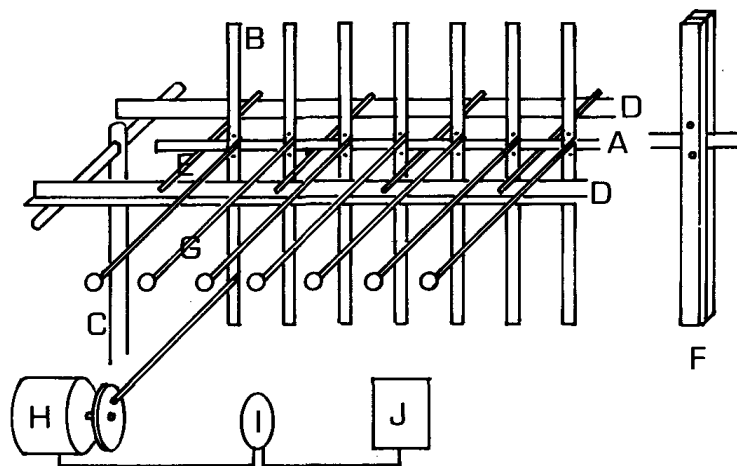


図1 実験装置の概略図

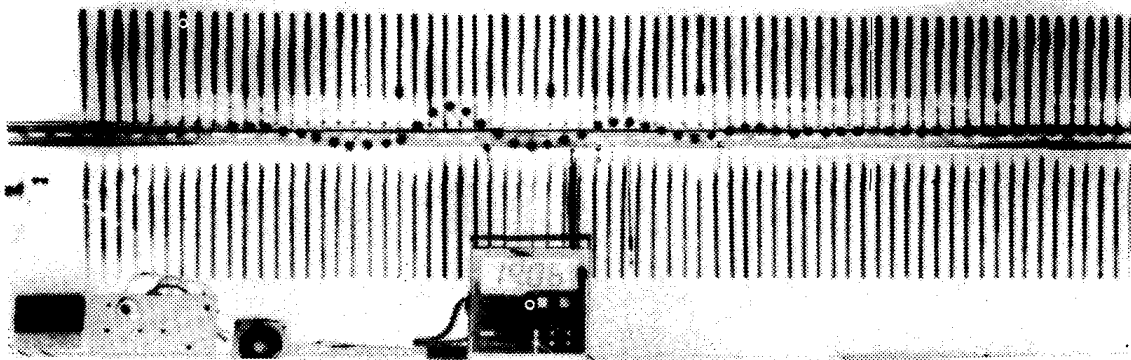


写真1 実験装置の写真

図1において、Aは幅5.0 cm、厚さ0.30 mmの鋼帯、Bは間隔 $a=2.50$  cmおきに鋼帯に固定された長さ $l=55.0$  cm、質量 $M=331$  gの真鍮棒（以下において振動棒と記すことにする）でA、Bにより連成振動系が構成される。Cは装置全体を支える支持棒、Dは2本の長いL型金具、Eは、2本のL型金具に橋渡しされた真鍮丸棒で、この上に連成振動系が支えられている。また1本の振動棒はFに示すように、長さ55.0 cmの6.0 mm角真鍮棒2本よりなり、この2本の真鍮棒で鋼帯を挟むことにより、その重心より $h=4.35$  cmの位置において鋼帯に垂直に固定されている。Gは、この連成振動系を伝わる波を水平方向より観察するために、振動棒に垂直に固定された軽いアルミパイプで、その先端には指標が付けられている。Hは可変速モーター、Iはタイマーで、Hに取付けられた円板上の一点と、装置の一端の振動棒を連結し、振動棒を一定周期で一定時間振動させて波束を送り出した。Jは大型のデジタル時計で、波束の伝わりとデジタル時計とを、モータードライブまたは8 mm撮影機にて、同時撮影することにより波束の伝わり方を調べた。

## 2.2 角周波数 $\omega$ と波数 $k$ の分散関数

振動棒の慣性モーメントを $I$ 、鋼帯のねじれの復元力のモーメントについての定数を $c$ 、重力の加速度を $g$ とする。振動棒の序数を一端より0, 1, 2, ……とし、 $(n-1)$ ,  $n$ ,  $(n+1)$ 番目の振動棒の角変位を $\phi_{n-1}$ ,  $\phi_n$ ,

$\psi_{n+1}$ とすると  $n$  番目の振動棒の運動方程式は

$$I \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = c(\psi_{n-1} + \psi_{n+1} - 2\psi_n) - Mgh \sin \psi_n \quad (1)$$

となる。いま角周波数  $\omega$ ，波数  $k$  の小振幅の波が伝わるとして

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n-1} &= A \exp[i(\omega t - k(n-1)a)] \\ \psi_n &= A \exp[i(\omega t - kna)] \\ \psi_{n+1} &= A \exp[i(\omega t - k(n+1)a)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおき，(1)に代入して  $\omega$  と  $k$  の関係を求めると

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_g^2 + \omega_c^2 \sin^2 ka} / 2 \\ \omega_g &= \sqrt{Mgh/I}, \quad \omega_c = \sqrt{4c/I} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となり，分散曲線は図 2 の a のようになる。

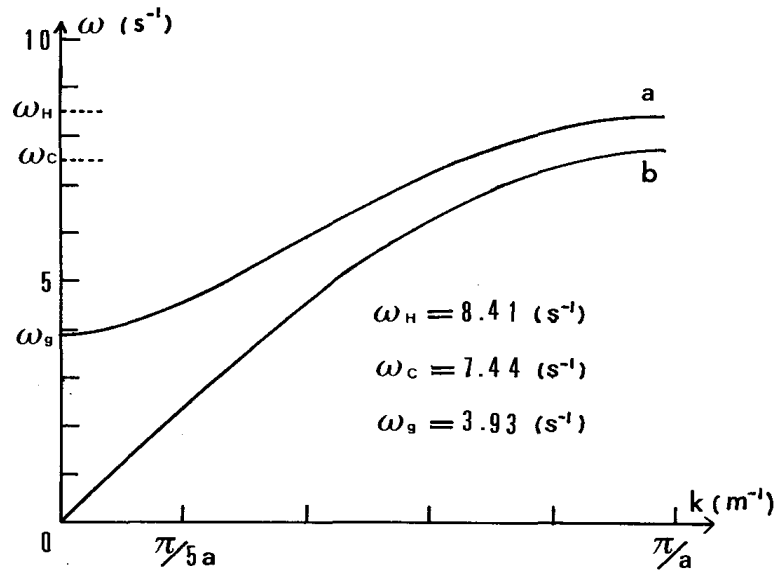


図2  $\omega$  と  $k$  の分散曲線

図 2 において，低周波遮断角周波数を  $\omega_g$ ，高周波遮断角周波数を  $\omega_H$  ( $\omega_H = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_c^2}$ ) とすると， $\omega_g < \omega < \omega_H$  の  $\omega$  については分散性の波が伝わるが， $\omega < \omega_g$  または  $\omega > \omega_H$  の  $\omega$  の波は，この連成振動系を伝わることはできない。 $\omega_g$ ， $\omega_H$  の値は  $M$ ， $h$ ， $I$ ， $c$  の値より求めることができるが， $\omega_g$  は系全体を同位相で振動させたときの振動の周期より，また  $\omega_H$  は，相隣りあう振動棒が位相差  $\pi$  で互い違いに調子を合せて振動するときの振動の

周期より実験的に求めることができる。実験的に求めた本装置の  $\omega_g$ ,  $\omega_H$ ,  $\omega_c$  の値は

$$\omega_g = 3.93 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_H = 8.41 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_c = 7.44 \text{ s}^{-1} \quad (4)$$

であった。図 2 の b は本装置の振動棒を、その重心の位置で鋼帯に固定した場合の分散曲線で、シャイブ式振動実験装置に相当する。このような連成振動系で波の伝わり方を観測するためには、半波長に 5 個程度の指標が含まれること、即ち  $k = \pi/5a$  程度の波を送り出すことが望ましい。また本実験装置の目的から、群速度  $V_g$  と位相速度  $V_p$  の差が大で、且つ  $V_g$  が小であることが必要である。これらの点から分散性媒質における波束をゆっくりと観測するためには、図 2 の分散曲線 b より a が適している。また  $V_g$ ,  $V_p$  は (3) より

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{a\omega_c^2 \sin ka}{4\sqrt{\omega_g^2 + \omega_c^2 \sin^2 ka/2}} \quad (5)$$

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k} \sqrt{\omega_g^2 + \omega_c^2 \sin^2 ka/2} \quad (6)$$

となり、本装置における  $k = \pi/5a$  のときの  $V_g$ ,  $V_p$  の値は上式及び (4) より

$$V_g = 4.47 \text{ cm/s}, \quad V_p = 18.1 \text{ cm/s} \quad (7)$$

となる。

### 3. 実験結果

#### 3.1 波束の伝わり

本装置において、波数  $k = \pi/5a$  に対する角周波数  $\omega_0$  及び周期  $T$  の値を (3), (4) より求めると、 $\omega_0 = 4.55 \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 1.38 \text{ s}$  となる。 $n = 0$  の振動棒を可変速モーター及びタイマーを用いて、上記の周期で 6 回正弦的に振動させて波束を送り出し、波束の伝わりを観測及び写真撮影し、計算結果と比較した。

### 3.1.1 波束の波形の計算

装置の一端  $n=0$  の振動棒を図3のように周期  $T$ , 角周波数  $\omega_0=2\pi/T$  で,  $N$  回正弦振動させ, その振動を  $f(t)$  とすると  $f(t)$  は,

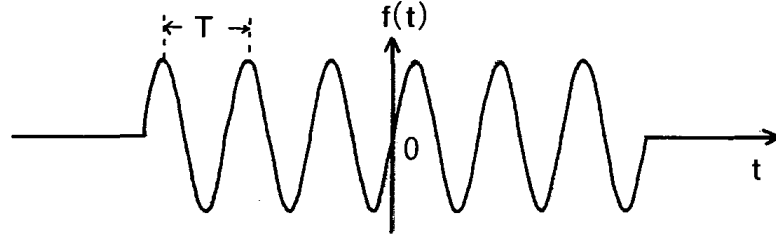


図3  $n=0$  の振動棒の振動

$$\left. \begin{aligned} t < -\frac{NT}{2}, \quad t > \frac{NT}{2} \quad \text{のとき} \quad f(t) = 0 \\ -\frac{NT}{2} < t < \frac{NT}{2} \quad \text{のとき} \quad f(t) = \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで

$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (9)$$

とおき  $f(t)$  のフーリエ係数  $A(\omega)$  を求めると

$$A(\omega) = \frac{N}{\omega_0} \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_0)N\pi/\omega_0}{(\omega - \omega_0)N\pi/\omega_0} - \frac{\sin(\omega + \omega_0)N\pi/\omega_0}{(\omega + \omega_0)N\pi/\omega_0} \right] \quad (10)$$

となる。 $N=6$ ,  $\omega_0=4.55 \text{ s}^{-1}$  のときのフーリエ係数  $A(\omega)$  は図4のようになるが, この連成振動系を波として伝わる成分は,  $\omega_g < \omega < \omega_H$  の  $\omega$  に対する正弦振動である。よって波束を  $\Psi(x,t)$  とおくと

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) = \frac{N}{\omega_0} \int_{\omega_g}^{\omega_H} & \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_0)N\pi/\omega_0}{(\omega - \omega_0)N\pi/\omega_0} \right. \\ & \left. - \frac{\sin(\omega + \omega_0)N\pi/\omega_0}{(\omega + \omega_0)N\pi/\omega_0} \right] \sin(\omega t - kx) d\omega \end{aligned} \quad (11)$$

となる。(11)の計算は,  $\omega_g$  と  $\omega_H$  の間を100等分し, パソコンを用いて積分

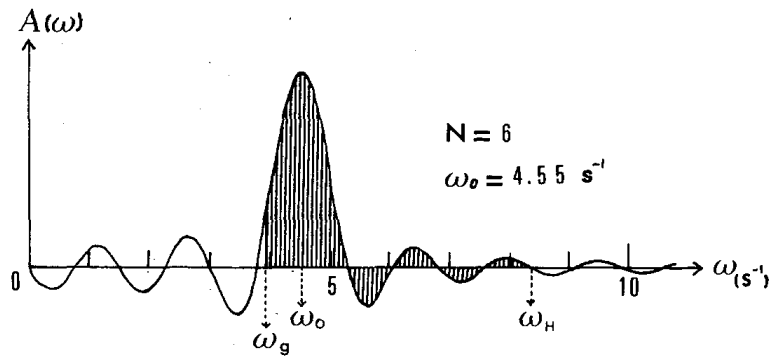


図4  $f(t)$  のフーリエ係数

することにより、各時刻における波形を求めた。

### 3.1.2 波束の観測

図5は  $n = 0$  の振動棒を振動させ始めた時を  $t = 0$  としたときの、 $t = 19.93 \text{ s}$  から  $20.97 \text{ s}$  までの  $0.26 \text{ s}$  おきの波束の波形である。

各時刻における波形のうち、上部は写真による波形、下部はパソコンによる波形で、目盛は振動棒の序数  $n$  である。図より波束の後端に新たに波が発生し次第に成長する様子、及び先端の波が徐々に消衰してゆく様子がわかる。また写真における波形の移動より計算される位相速度  $V_p$  は

$$V_p \doteq \frac{(37.6 - 30.5) \times 2.5}{0.26 \times 4} = 18 \text{ cm/s} \quad (12)$$

で、計算値(7)とほぼ一致する。

図6は  $t = 18.27 \text{ s}$  より  $t = 27.72 \text{ s}$  までの、 $2.36 \text{ s}$  おきの波束の波形である。

この場合は、時間間隔が長いので、次々の時刻における波束の各波は相対応していない。図の写真における波束の中心の移動より、波束の群速度  $V_g$  を計算すると

$$V_g \doteq \frac{(44.0 - 27.0) \times 2.50}{2.36 \times 4} = 4.50 \text{ cm/s} \quad (13)$$

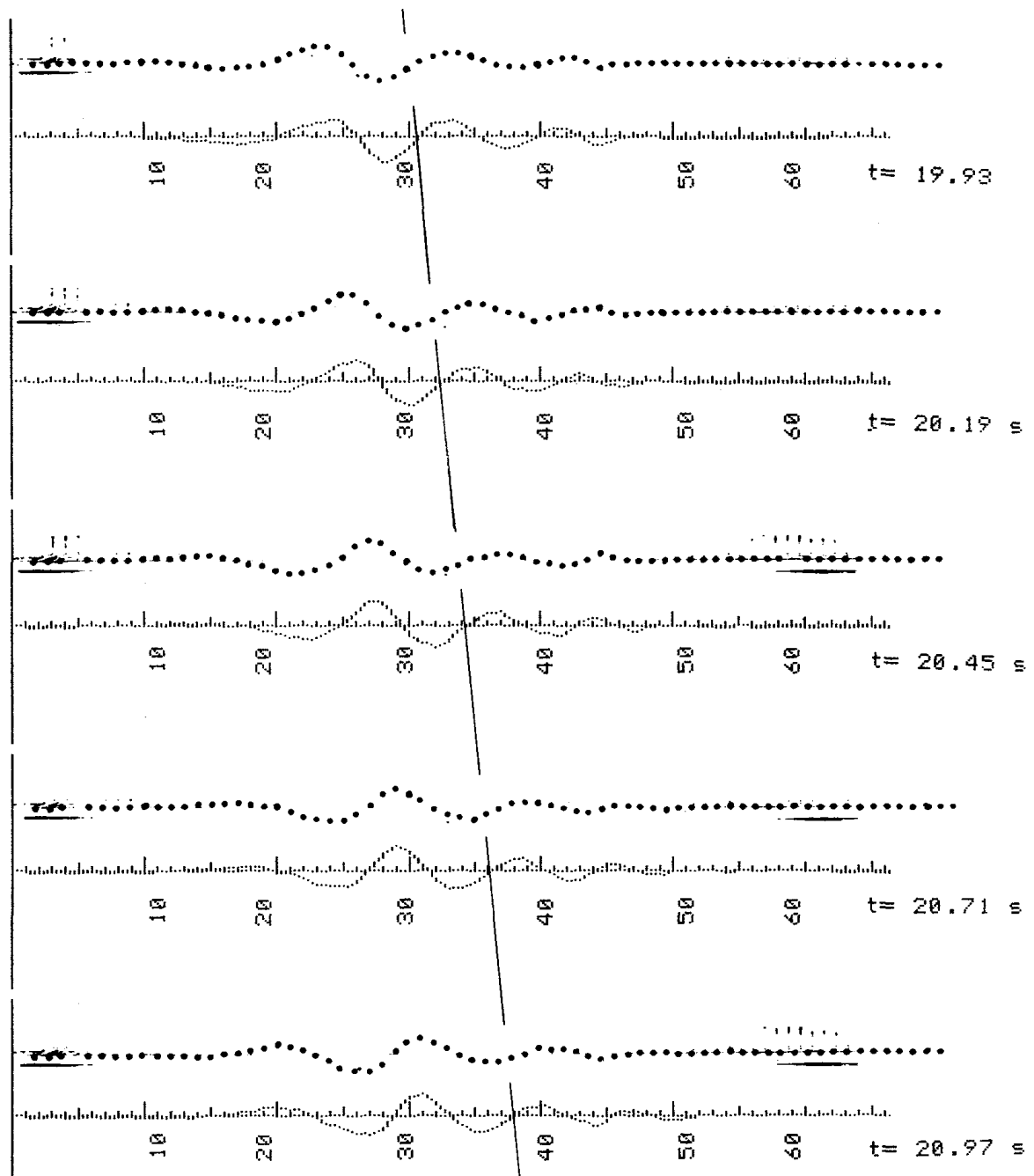


図5 波束の伝わりと位相速度

となり，計算値(7)とほぼ一致する。なお，8 mm 映写機にて波束の伝わりを映写することにより，よりよく分散性媒質における波束の伝わり方を観察理解できる\*。

### 3.2 $\omega < \omega_g$ , $\omega > \omega_H$ の場合の減衰波

$\omega = \omega_g$  のときは， $k = 0$  となり，凡ての振動棒は同じ位相で，振動棒を



# 分散性媒質における波束の実験

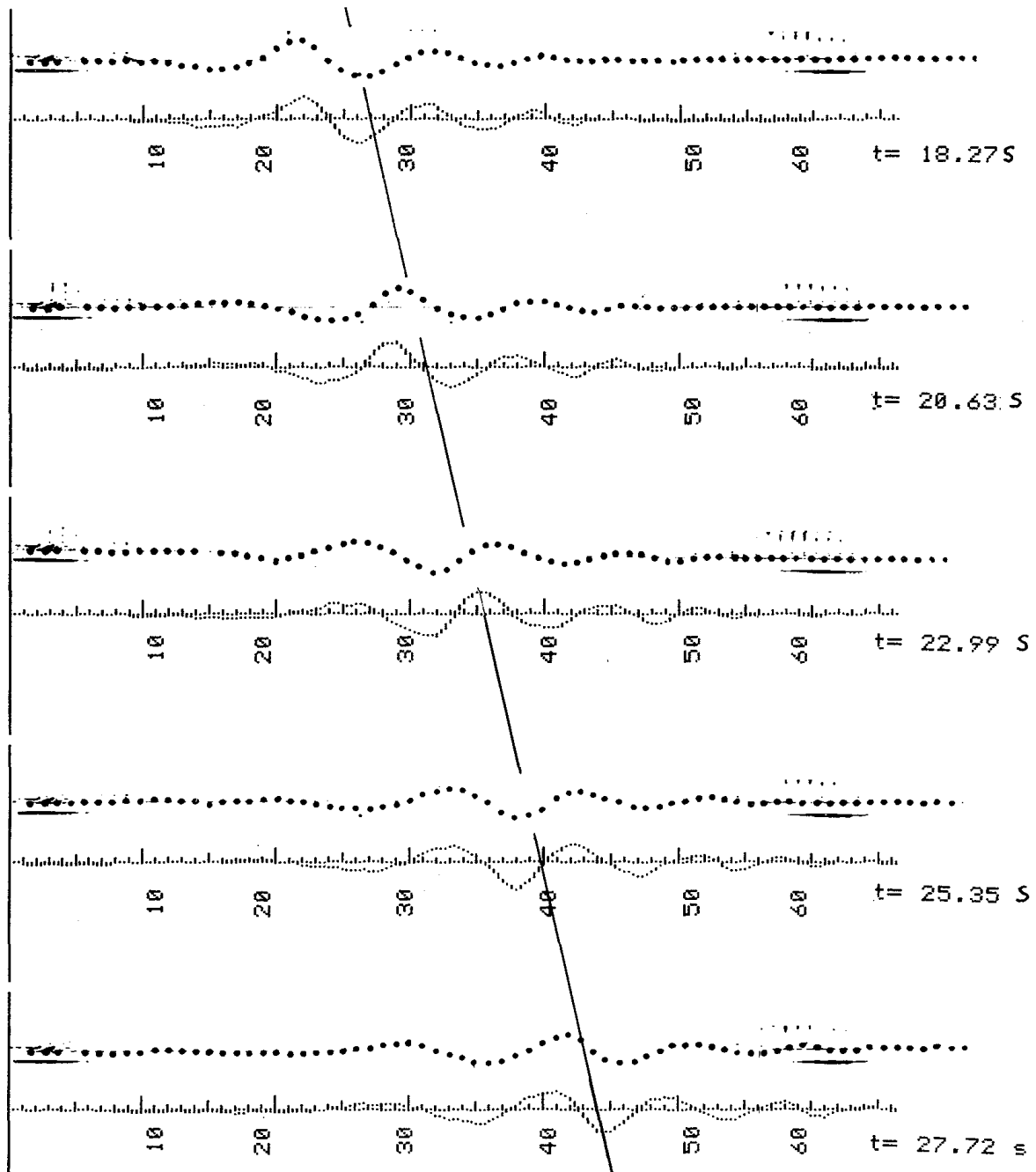


図6 波束の伝わりと群速度

剛体振り子としたときの周期で振動する。 $\omega < \omega_g$  のときは(2)における  $k$  が虚数となり、最早波動として伝わらず、次々の振動棒は同相で振幅が指数関数的に減衰する減衰波 (evanescent wave) となる<sup>1)</sup>。これは例えば電離層において、プラズマ周波数より周波数が小さい電磁波が全反射する場合に相当する。 $\omega$  と振幅の減衰比との関係は



写真2  $\omega < \omega_g$  の場合の減衰波

$$\psi(n, t) = A \exp(i\omega t - \beta a n) \quad (14)$$

とおき(1)に代入すると

$$\beta a = 2 \sinh^{-1} \frac{\sqrt{\omega_g^2 - \omega^2}}{\omega_c} \quad (15)$$

となり、振幅は公比  $\exp(-\beta a)$  で減衰してゆく。写真2は  $n=0$  の振動棒を  $\omega = 3.87 \text{ s}^{-1}$  で正弦的に振動させ続けたときの減衰波で、振幅の減衰比は(15)より求められる  $\exp(-\beta a) = 0.832$  とほぼ一致する。

$\omega > \omega_H$  の場合は  $k$  は複素数になり、次々の振動棒は反対位相でジグザグの振動を行い、その振幅は指数関数的に減衰してゆく。 $\omega$  と振幅の減衰比との関係は

$$\psi(n, t) = (-1)^n \exp(i\omega t - \beta a n) \quad (16)$$

とおき(1)に代入すると

$$\beta a = 2 \cosh^{-1} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_g^2}}{\omega_c} \quad (17)$$

となる。写真3は  $n=0$  の振動棒を  $\omega = 8.56 \text{ s}^{-1}$  で振重させ続けた場合の減衰波で、振幅の減衰比は(17)より求められる  $\exp(-\beta a) = 0.657$  とほぼ一致する。

以上、分散性媒質を伝わる波束を、ゆっくりと観察できる実験装置及び実験結果について報告したが、本装置の組立て及び実験に際し、静岡大学教養部物理教室の皆様から種々御援助、助言を頂いた事を深く感謝します。

## 分散性媒質における波束の実験

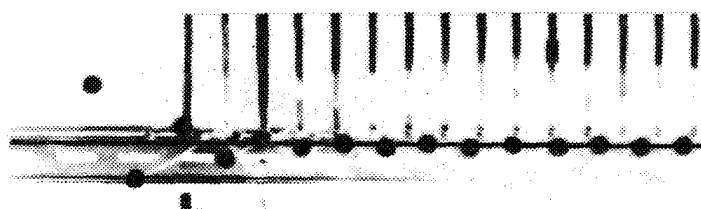


写真3  $\omega > \omega_H$  の場合の減衰波

\* 日本物理学会1983年秋の分科会（岡山大学）で映写した。

## 参 考 文 献

1) F. S. Crawford, Jr.: *Waves (Berkeley Physics Course—Vol.3)* (1968). p.134

Iain G. Main: *Vibration and Waves in Physics (Cambridge Univ. Press)* (1978). p.221

(愛知学泉大学経営学部教授)

昭和62年12月26日受理